Mise en perspective du Théorème de Gödel

Michaël Klopfenstein

Sommaire

Résumé 5
Introduction 6

Approche conceptuelle 8
Le « tout en une fois » 9
Le barbier 10
Condensation de l'information… jusqu'où ? 12
Berry et le Paradoxe non paradoxal 13
Le sens à partir du sens 15
Ordonner le sens 15
Objectalité 17
Un fondement 19
Direction 20
La diagonale de Cantor 21
Deux versions 21
Le rêve ou le labeur 23
Forme : liberté et accès 24
Cadre de définition 26
Etcetera 27
Accès à l'infini 27
Un autre accès 28
L'accès est loin de TOUT 30
Sens illimité 31
Richesse du nouveau monde de Cantor 31
Cantor paradoxal ou constructif 33
Renoncement à l'univocité ? 33
L'interprétation maximale 36
La vérité embarquée 39
Modèle de la pensée 39
Théorie de la pensée 39
Théorie de la réalité 40
Approche des mathématiques 42
Les mathématiques en trois temps 43
1- L'univocité 43
2- L'observation 44
3-La spéculation 47
Vérité et objets mathématiques 48
Histoire de logique 48
Distinction intérieure extérieure 51
Chercher l'erreur 53
Le bunker paradisiaque 55
Liens et interprétation 58
Le lien 58
Le schéma 58
Au dessus du vide 60
Structure 60
Quid de l'intuition géométrique 61
L'interprétation 63

Charge sémantique ajoutée 63
Un fond dur....68
Vers la liberté....69
Vers l'infini… 72
Processus répété....72
L'univocité linéaire....72
Finitisme 74
Complexités cumulées....76
Brève théorie du langage....80
Question de langage....80
Origine 81
Quelle mentalité ? 84
Largeur Sémantique....84
Stabilité, largeur et unité 85
Liberté....86
Expression....87
Intersubjectivité....88
Echelle du sens commun 88
Indépendance 88
Référence....90
Identité 91
Expressivité....93
Le bleu....93
Les mots sont plus ou moins que la pensée 94
Spécificités du langage mathématique 95
Sens schématique....95
Formel versus naturel....96
Référence formelle 98
Mécanisme de description 99
Transposition schématique 99
La reconnaissance....100
Linéarité du langage 100
Analyse du théorème d'incomplétude de Gödel....102
Motivation générale du théorème 102
Analyse préalable 104
Les structures en dur 104
1-Les entiers - E....104
2-Liste de symboles - S....105
3-Structure des phrases bien formée - P 105
4-Les démonstrations bien formées -D 106
5-Les 45 et 46 fonctions de Gödel - F 106
Le menteur 110
Comment se contredire....113
Le paradoxe de Richard 114
Dit crûment....117
Algorithmique symbolique de l'application à soi-même....117
Non univocité de l'interprétation : 119
Le dépassement de la constructivité ou du sens ? 121
Problème extérieure à la question 122

Analyse du théorème 125
Le théorème V 128
La démonstration 130
La substitution 130
Les affirmations [9-10] et [15-16] 131
Non-univocité 133
Analyse de $Sb(p^{19}_{Z(p)})$ 134
Confusion interprétative 136
Vérité intérieure et extérieure 137
Cadre subjectif 140
Indécidabilité arithmétique 140
Conclusion 142

Annexe 1 - Aperçu d'une théorie de la pensée 144
Le Concept : cellule de base 144
Les associations 144
Les cellules primitives 145
Vide de Sens 145
Construction de la perception 146
Souvenir et analyse 147
La mémoire 147
Les contextes 147
La synthèse 148
L'usage incessant 149
Les chaînes d'ordres 150
Besoin-satisfaction 151
Construction d'une chaîne d'ordre 152
La conscience 152
La réflexion 153
Système Modulaire 154
Théorie et théories 156

Annexe 2- Théorie de la réalité. 157
L'image de la trame 157
L'image 157
Une forme du réel 159
Commentaires 161
Réalité retrouvée 161
Condensation 162
Loin du compte 163
Réalité immatérielle ? 163
Identités 164
Netteté 165
Inertie 165
Limite de la pérennité 166
La réalité surpasse l'identité 167
L'extérieur et l'intérieur 168
Conclusion 169

Résumé

Je me propose de montrer que les mathématiques classiques sont assises sur des concepts sémantiques subjectifs. Ceux-ci favorisent une compréhension « classique » du théorème de Gödel. Sur la base d'une autre perspective que je vais esquisser ici, je propose de constater que le raisonnement de Gödel n'a plus la même portée.

Pour lire la démonstration du théorème d'incomplétude de Gödel, nous sommes habitués aux mathématiques formelles modernes : ce sont des propositions symboliques qui suivent les règles de manipulations élémentaires. Elles constitue la brique élémentaire de la pratique mathématique. Pour le relire sous un autre angle je propose de concentrer l'attention sur les objets que décrivent ces phrases au lieu de considérer les phrases elles-mêmes. Comme le cadre du théorème de Gödel se limite à des méthodes récursives, on peut déployer les objets décrit comme des arbres. On suivra la construction de ces arbres au travers des « algorithmes » décrit par ces phrases symboliques.
Aujourd'hui les mathématiques se sont établies sur la confiance ferme en ces manipulations symboliques axiomatiques à la base de la logique. Je propose de suspendre cette confiance le temps d'une analyse détaillée des objets en jeux et d'observer ce qui est fait (on dira « interprété ») sur les objets manipulés. La manipulation symbolique avance pas à pas, mais ne voit pas l'ensemble. Si on a confiance tout va bien et c'est un mécanisme univoque qui ne pose aucun problème. Mais si on s'interroge et qu'on veut mettre le nez dans le moteur, dans les objets décrit par ce que ces mots affirment, alors il se passe des choses surprenantes. C'est une histoire de confiance en des manipulations autorisées ou non. Et pour suivre ce raisonnement, il faut au moins parvenir à une modeste confiance que la pratique mathématique peut être lu sur une base radicalement différente de la manipulation symbolique : il s'agit de la manipulation d'objets fait de connexion univoque et de liens interprétatifs entre ces objets, il s'agit d'un cadre beaucoup plus terre à terre que les « affirmations de vérité ». Ca ressemble plus à de l'informatique, à la compréhension mentale des procédures d'un logiciel.
En approchant le théorème ainsi, les arbres seront les objets, les algorithmes seront les interprétations qui « manipulent » ces arbres (objets fait de connexions univoques). Les affirmations symboliques correspondront chacune à un ensemble de processus univoque (action « intérieure ») ou bien à une affirmation de similarité entre deux objets (reconnaissance interprétative « extérieure »). J'espère pouvoir dire qu'avec ce suivit des algorithmes manipulant des arbres, on travaille à un niveau plus élémentaires que celui des « affirmations de vérité » qui sont des schémas insouciants de leur contenus. Tout ce qui sera manipulation univoque ne posera pas de problème, ce sont les « reconnaissances » (les affirmations de similarité) qui vont apparaître comme surprenantes. La traduction des affirmations symboliques en « manipulation d'arbres » révèle des questions sémantiques complètement invisibles dans l'innocente pratique symbolique confiante. Et j'espère pouvoir dire qu'en se donnant le mal de voir ces pratiques « sémantiques », il sera difficile d'adhérer à la pratique symbolique dans le

cadre définit par Gödel pour son théorème. C'est en effet, le cadre spécifique construit par Gödel qui va révéler un problème : le fait d'étudier les phrases symboliques à l'aide de ces mêmes phrases symboliques va produire une difficulté sémantique. La plupart des mathématiques ne fonctionnant pas sur de tels cadres ne posent pas ce type de problèmes. Ma conclusion sera donc que la confiance symbolique n'assure pas la recevabilité, ni fiabilité des ses affirmations contrairement à ce qu'on a tendance à constater en terrain « naturel ». Le cadre de la pratique importe, car l'interprétation peut se jouer des symboles.

Une longue première partie décrira les changements de perspectives sur plusieurs concepts classiques. La seconde partie abordera le théorème de Gödel lui-même, sous un regard inspiré par ces perspectives. On tentera d'y montrer que la conclusion de Gödel n'est pas une découverte sur les mathématiques vu dans leur cadre classique, mais que sont raisonnement repose sur un cadre de raisonnement très spécifique et subjectif : son théorème repose sur l'observation d'un objet reconstruit à distance de lui-même, on y observe une vérité intérieure par une vérité extérieure distincte qui lui est pourtant identifié. Nous argumenterons pour montrer que c'est une pratique qui peut être contestable.
Les annexes qui suivent sont les résumés d'une théorie de la pensée et d'une théorie de la réalité, qui ont formé les bases conceptuelles sous-jacentes à ces travaux.

Introduction

On aura compris que l'analyse du théorème de Gödel, que je propose ici, est bien éloignée de la pratique mathématique classique. Elle ne serait jamais née, si elle n'avait pas été précédée par une abondante réflexion philosophique sur le concept de réalité, d'identité, de perception, de sens, sur la compréhension intérieure des réalités extérieures et leur impossible dissociation … Les mathématiques sont une curiosité atypique, assez discordante en comparaison avec beaucoup de mécanisme de la réalité. Armé d'un fond de concept assez cohérent, je cherche à leur donner une place pertinente.

On a parfois négligées et parfois posées les mathématiques comme fondement de la réalité. La question de la nature des mathématiques et de leur lien avec le reste de la réalité en devient d'autant plus vive. Il s'agit d'observer les mathématiques, non pour justifier nos pratiques culturelles, mais au contraire pour rechercher à mettre en relation ce qui est intérieur et humain avec ce qui est extérieur et naturel. Quelles sont leurs présences dans le monde ? Quels sont leurs liens avec la pensée ? La recherche a été longue, tâtonnante, incertaine. Mais une fois le chemin parcouru, sa présentation, ses orientations peuvent être condensées. C'est pourquoi je présenterais à grand trait les axes de cette perspective personnelle. Ce n'est pas le lieu d'une exposition détaillée. Ce regard rapide est orienté en vue de l'étude du Théorème Gödel.

Il était indispensable de se positionner face aux mathématiques formelles qui constituent le cadre de ce Théorème. La présentation de ces fondements prendra tout autant un

tour critique vis-à-vis des mathématiques classiques que celui d'une simple perspective unifiante des mathématiques.

Pour avancer dans cette direction nouvelle et hésitante, j'utiliserai un langage beaucoup trop audacieux, relâché, souvent trop analogique ou rhétorique. Mais il s'agit de peindre un nouveau paysage en utilisant les outils les plus accessibles du langage.

De plus, il m'a semblé utile de pousser assez loin l'impression de confiance en mon propre regard, afin de lui donner une apparence de cohérence. Présentant ici mon excès avec lucidité, dans le but d'établir une communication, des réactions, je crains que cette dévaluation anticipée ne sape le relief insufflé au contenu. Par ce paragraphe, j'aurai alors brisé tout le bénéfice recherché, me retrouvant avec mes seuls mots. (Voici un exemple d'auto-application dépendant de l'interprétation du lecteur ; concept utile à la lecture du Théorème de Gödel).

Approche conceptuelle

Le « tout en une fois »

Depuis Frege, nous pratiquons les mathématiques dans un monde de l'exigence de précision où tout se dit « en-une-fois ». Au travers des quantificateurs 'quelque soit' et 'il existe', chaque affirmation se place face à tous les objets du cadre étudié. C'est, du moins, ce qui ressort « intuitivement » lorsqu'on lit une phrase symbolique dans un tel système. La méthode axiomatique, développée à la suite de ce cadre posé par Frege, consiste à transformer tous les objets mathématiques en affirmations universelles, atemporelle. A titre d'exemple, les axiomes de Peano, définissant les entiers, sont donnés par :

$$\forall x \neg (sx = 0)$$

$$\forall x \exists y (\neg x = 0 \rightarrow sy = x)$$

$$\forall x \forall y (sx = sy \rightarrow x = y)$$

$$\forall x (x + 0 = x)$$

$$\forall x \forall y (x + sy = s(x + y))$$

$$\forall x (x \cdot 0 = 0)$$

$$\forall x \forall y (x \cdot sy = (x \cdot y) + x)$$

Bien que ce soient des affirmations de contraintes locales, elles sont données de façon universelle, face à tous les objets possibles. L'ensemble de ces contraintes locales définit un schéma global de « ce que sont les entiers ». En regardant ces affirmations de près, il s'agit de liens entres des objets (les nombres) et leur successeur qui permet de retracer l'ensemble de l'édifice de façon récursive. On y découvre l'essence de la méthode axiomatique : tout est affirmé « en une fois » par une description universelle de lien locaux dont la conséquence est la description d'une structure globale. Le « quelque soit » définit chaque lien locaux « en une fois ». La simplicité des liens locaux, ne laisse pourtant rien présumer de la figure globale produite par ces contraintes ; elle est d'une grande complexité, c'est l'ensemble des conséquences, des sous-structures à découvrir, des théorèmes induit par ces axiomes. Tout cela n'a rien de simple, c'est l'arithmétique. On retrouve le même procédé dans le théorème de Gödel, quand il définit les '45 fonctions' permettant de décrire les concepts de substitution et de démonstration.

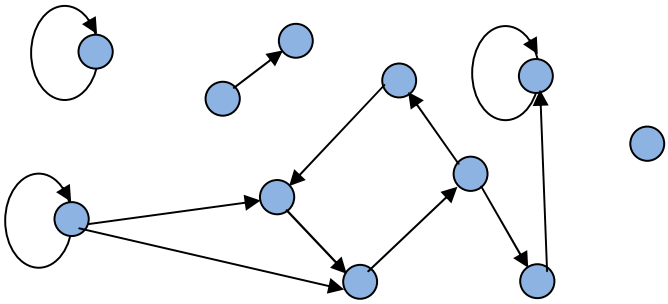
Cette universalité est perçue par une grande part de la communauté mathématique comme une composante intuitive essentielle des mathématiques, même si ce n'est pas toujours conscient. Les mathématiques « sont » universelles, toujours vraies, constituées d'affirmations atemporelles. Mais il y a deux sens à cette universalité, celui de la permanence des vérités mathématiques et celui de la concentration des affirmations en un minimum de concepts. C'est le deuxième concept qui m'intéresse. L'idée de contraintes exprimées « en une seule fois » face à tous les possibles. Je nommerai aussi cela maladroitement « l'atemporalité » dans le sens ou aucun procédé

de construction pas à pas n'est donné pour établir la structure globale, seul existe un discours sur les liens locaux, les contraintes face à « toute l'existence possible ».

Je propose de prendre du recul, et de voir cette « atemporelité » comme un simple cadre « pratique et utile », un cadre qui a beaucoup de vertus, mais qui n'exprime rien de fondamental sur la nature profonde des mathématiques. De plus, je pense que ce cadre de la pratique mathématique est à l'origine d'un certain nombre de problèmes importants dans les fondements des mathématiques. On trouve ces problèmes dans beaucoup de paradoxes. Ces paradoxe ont été contournés par les fondateurs de systèmes formels, mais non forcément expliqués, réduits. Je propose ici un exemple parmi d'autres pour en parler.

Le barbier

Soit un schéma fini, fait de cellules et de liens:



A partir de ce schéma, définissons une nouvelle cellule selon le procédé du Barbier qui rase les gens qui ne se rasent pas eux-mêmes. Nous voulons placer une nouvelle cellule dans ce schéma avec des liens qui la relie aux cellules déjà existante. Ayant énoncé l'existence d'une nouvelle cellule, définissons maintenant les liens à ajouter par cette phrase: « cette nouvelle cellule est exactement liée à toutes les cellules qui ne pointent pas directement sur elles-mêmes ». C'est un problème fini, il n'y a que trois cellules qui pointent sur elle-même, toutes les autres sont concernées. Cette finitude permet de comprendre les enjeux du paradoxe. Mon conclusion consistera à dire qu'une telle définition est non-univoque. La définition des liens n'a pas un sens permettant la mise en œuvre d'une action clairement déterminée, elle est donc non-recevable. Je postule, j'en reparlerai plus loin, que les mathématiques sont la science des constructions univoques. Une telle définition n'est pas univoque, mais auto-contradictoire.
Constatons d'abord que l'énoncé est de nature « atemporelle », dans le sens où les liens pointant vers la nouvelle cellule sont définis par des relations indépendamment d'une construction par étape. Ils sont définit comme affirmation de contrainte face aux objets. A l'inverse tentons de rendre cette définition « temporelle » en construisant la satisfaction de la contrainte demandée pas à pas.

Il y a plusieurs cadres pour accomplir cette construction étape par étape. Voici une proposition :
- On observe le graphe cellule par cellule, on repère toutes celles qui sont non-liées à elles-mêmes.

- On pose la nouvelle cellule.
- On construit pour chaque cellule de la liste établie un nouveau lien vers la nouvelle cellule.
Tout cela est parfaitement réalisable. Et répond d'une certaine façon à la contrainte demandée. Seulement, une fois que la construction est réalisée, si on observe à nouveau la contrainte, on constate un échec : la nouvelle cellule n'est pas liée à elle-même, alors que toute cellule non liée doit y être. On l'a « oublié » puisqu'on a fait la liste avant de la poser.

On peut changer de stratégie :
-On pose la nouvelle cellule
-On passe en revue les cellules et dès qu'on en rencontre une cellule non liée, on la relie avec cette nouvelle cellule.
- On recommence jusqu'à épuisement des cellules à traiter.
Dans ce cas la nouvelle cellule est aussi liée parce qu'elle a été vue comme cellule non liée à elle-même. Mais si à nouveau, on observe le graphe, la contrainte portant sur cette cellule devient fausse ; puisque cette cellule est liée à elle-même elle ne devrait pas être liée à elle-même. On sent ici une inconsistance : il est évident qu'on ne peut pas relire la contrainte une fois le travail effectué, puisqu'on a construit le lien inexistant auparavant, il est forcément présent après. La deuxième lecture est contradictoire parce qu'elle « refait le travail » sur un support différent.

Tout cela nous conduit à comprendre que la contrainte annoncée n'est pas « universelle ». Elle est constructivement contradictoire. On pourrait aussi dire qu'elle n'est pas « atemporellement » valide. Remarquons qu'à chaque fois, la contradiction intervient après une seconde observation, comme si on voulait refaire le travail une fois terminé.

Quels sont les modes de la contradiction : la phrase se pose comme une contrainte « en une fois » qui n'est pas de nature constructive, mais de nature relationnelle, sans autre explication sur la gestion de la structure à produire. Quelque soit le procédé constructif choisit, la contradiction porte par un retour en observation après construction. On remarquera aussi que les différents modes de construction proviennent du choix d'un ordre entre observation et construction des différents objets à construire. Ainsi l'ordre, la succession d'action - construction ou observation - apparait comme une notion prépondérante, parce que le support se modifie en cours de route.
Dans le mode d'expression classique les contraintes sont données « en une fois », aucun ordre n'est précisé, aucun support de l'ordre n'est précisé. On ne sait si le schéma doit être lu avant ou après qu'on y ait mis la nouvelle cellule. N'ayant d'autre précision, notre perception culturellement « atemporelle » des affirmations mathématique sous-entend que les affirmations doivent satisfaire à « toutes » les situations, autant avant qu'après; il faut satisfaire l'élaboration du procédé de construction tout autant que l'observation de la structure achevée.

Construction et observation dépendent mutuellement l'une de l'autre. Pour construire, il faut observer sur quoi on doit construire. Pour observer, il faut savoir ce qui est construit. Les observations avant et après construction diffèrent. Chaque ajout de construction

modifie l'observation. « Le sens ajouté » modifie le sens global. Rien de surprenant à ces remarques, c'est approche ordonnée est assez opposée à la notion de « tout en une fois ». Je propose dès à présent de voir l'ordre de définition (de construction) des objets comme une idée primordiale, nous allons l'exposer plus en largeur.

La contrainte passe complètement sous silence cette dépendance temporelle, ce qui existe « au moment de ». Dans un cadre « tout en un », on ne sait pas à quel moment doit porter l'observation pour être considérée comme valide. Seulement, il est impossible que l'observation soit valide à la fois avant et après la construction car la situation de la nouvelle cellule est modifiée. L'affirmation « atemporelle » prend au contraire comme tacite que les affirmations doivent être satisfaite dans tous les cas. Sous le cadre de l'atemporalité, la définition revient à construire un objet différent de lui-même, comme la définition d'un entier x devant vérifier x=x+1 (ou un booléen devant satisfaire x=1-x).

C'est en effet, une pratique commune du cadre des systèmes formels ; les affirmations symboliques ont tout autant valeur de définition que d'observation. Il n'y a pas de vérité sous-entendu derrière une proposition formelle, seules existent des affirmations que l'on pourra manipuler. Elles ont valeur d'affirmation comme d'observation. C'est ce qui fait la force du système symbolique, il rend mécanique la manipulation des affirmations, s'extrayant ainsi de la question de la vérité. Ce sont des affirmations de liaison atemporelle. Dans le théorie des ensembles naïve, c'est le lien schématique d'appartenance qui est la base de la construction des objets (L'exemple ci-dessus utilisant la notion de schéma est donc très à propos).

On retrouve le même problème « d'atemporalité » dans le paradoxe de Russel (l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas). Et vu sous cet angle, on constatera que ce n'est pas « l'infini » qui produit le paradoxe. Il s'agit du même paradoxe que celui présenté ici. Quand on regarde le langage exprimant ce paradoxe, c'est bien l'incompatibilité « temporelle » entre définir, construire et observer. Les paradoxes de ce type sont nombreux et leur contradiction s'établit en deux temps : on construit sur une observation puis on observe à nouveau... On retrouvera aussi ce mécanisme dans le procédé diagonal de Cantor, nous en reparlerons.

Condensation de l'information… jusqu'où ?

Mais alors d'où vient cet attachement à l'atemporalité des mathématiques ? De son efficacité. En pratiquant « tout en une fois », on condense l'information à son maximum. C'est une source d'efficacité inappréciable dans les démonstrations, dans la compréhension et dans l'observation des objets mathématiques.
Quand on observe les pratiques mathématiques avec du recul, on constate que beaucoup de concepts ont pour vocation de concentrer les informations (la notion de variable, la notion d'ensemble, les théorèmes qui s'adressent à une « population » d'objet, les notations qui conjuguent la condensation des structures en jeu, etc). Concentrer l'information est un des mécanismes fondamentaux des mathématiques. La méthode des contraintes axiomatiques atemporelles recherche à dire en « une seule fois » toutes ces informations redondantes nécessaires à déployer une structure. Elle

détient même une mention d'excellence dans cette recherche de compactage : toutes les mathématiques s'y réduisent à quelques axiomes.

Pour y parvenir, la méthode axiomatique décrit uniquement les liens locaux et une seule fois pour tous les types de schémas similaires. En pratique, la notion de « similarité » n'est pas définissable au dessus de la notion de schéma, les liens étant neutres, il n'y a pas de schémas fondateurs lisibles prioritairement (pensons aux pavages du plan), il n'y a donc pas unicité de la réduction axiomatique. De telles condensations suffisent à définir la totalité de la structure à engendrer, sans n'avoir jamais à parler de la totalité (pour y parvenir il existe une « pratique sémantique délicate » sur le concept de variable). Cette méthode permet de manipuler la totalité d'une structure, en ne prenant qu'un individu qui « communique » avec ses seuls voisins ; c'est d'une redoutable efficacité.

Mais pourquoi ça ne fonctionne pas tout le temps? Pourquoi existe-t-il des paradoxes ? Toute construction doit s'appuyer sur ce qui est déjà construit pour s'agrandir. Le mécanisme « tout en un » ne fonctionne pas quand on définit un lien à partir de l'observation de celui-ci. Il n'y a aucun sens à construire une contrainte à partir de l'observation de sa construction non réalisée. Dans un cadre temporel, cela devient manifeste. Dans le cadre atemporelle auquel on est très habitué, les définitions auto-observatrices peuvent avoir l'apparence d'objets bien formés. Une question légitime des fondateurs de systèmes formels étaient : pourquoi ne pourrait-on pas être relié à soi-même ? Mais le problème n'est pas là. C'est quand on reste dans le contexte « tout en un », que la question se formules ainsi. Se relier à soi-même ne pose pas de problème ; le problème est qu'on ne peut pas se définir à partir de sa définition. Le sens utilise ce qui est déjà bien défini pour s'exprimer.

Ce qui obscurcit passablement le tableau, c'est qu'une définition auto-observatrice n'est pas systématiquement erronée. Pour apparaître comme clairement erronée, il faut que la définition pose une différence entre elle et elle-même. Il faut que puisse apparaître quelque chose comme x=non x. Les définitions sur soi-même où aucun écart n'est produit, les définitions de la forme x=x, ne posent pas de problème. Aussi pourrait-on avoir l'impression de bien construire en construisant par rapport à son observation. Mais en réalité une telle définition ne dit rien. Observons la chose plus en détail.

Berry et le Paradoxe non paradoxal

Pour éclairer ce propos rappelons le paradoxe de Berry « Soit *n* le plus petit entier qui ne peut pas être défini en moins de 18 mots ». Et bien *n* vient d'être définit en 17 mots...

On constate à nouveau que la construction n'a pas lieu à partir d'un objet explicitement désigné. L'objet est construit à partir des définitions, dont elle-même fait partie. Autrement dit, il est construit à partir de sa propre observation (car c'est en observation avec sa propre définition que va naître le paradoxe). Si l'on avait fixé au préalable une liste de définitions, on pourrait choisir ce nombre sans contradiction. Même si cette définition possède moins de 17 mots, étant une définition ultérieure, elle ne concerne en rien la structure observée; elle est posée après. En fait il est nécessaire de situer cette définition comme extérieur à l'étude parce cette phrase prétend observer la structure

complète et il ne faut pas qu'elle s'observe pour être non contradictoire. Placée à l'extérieur, il n'y a plus de problème.
Si l'ensemble des définitions n'est pas explicité à l'avance, la construction est contradictoire, mais si on balaie une liste des choix possibles de *n* tout fonctionne bien. En ajoutant cette définition, on produit une immanquable contradiction. Si à l'inverse, on considère que cette définition est déjà dans la liste des définitions possibles, alors elle est contradictoire par nature. Si l'on considère que l'ont fait référence à toutes les définitions qui existent d'avance « tout en un», on une auto-contradiction. On peut même dire, peu importe la liste des définitions ; si la liste était réduite à cette seule définition, on aurait une contradiction. La définition dit : « je suis quelque chose que je ne suis pas par ailleurs». On constate ainsi que le nombre *n* et l'existence d'autres définitions n'ont aucune importance. Cette définition ne fait-elle pas rapport à d'autres définitions ? Elle parle bien des autres définitions, mais n'en a pas besoin pour être contradictoire. Le fait que la contradiction ne porte pas sur la structure à observer est intéressant.

Sur cette base, on peut construire un paradoxe non paradoxal. « Soit n un entier définissable en huit mots ». En prenant cette seule définition, tout nombre entier y satisfait. On a rien dit sur *n*, et aucun défaut de sens ne porte. D'un autre côté, on pourrait tout autant voir cette phrase comme vide de sens, parce qu'on n'a rien dit sur *n*. La définition parle de contrainte envers la définition elle-même, mais aucune contrainte n'est posée sur n. En y regardant de près, les contraintes s'établisse sur le même mode que le paradoxe de Berry. Le paradoxe de Berry est il aussi vide de sens ? Il semble un peu moins vide, parce qu'on s'imagine parcourant les définitions et comptant les mots. Alors qu'ici, c'est le grand vide. Dans les deux phrases, les relations aléthiques sont pourtant de la même nature : elles portent un regard sur les définitions et non sur les objets dont parlent les définitions. Dans un contexte « tout en une fois », les définitions parlent d'elles-mêmes. Elles construisent (définissent) un objet en observant des vérités non pas de l'objet mais de la définition de l'objet et donc d'elle-même. On constate la vacuité d'un tel procédé par le fait que les objets, qu'on est sensé définir, n'interviennent en rien dans les contraintes de construction, ni dans Berry, ni dans le paradoxe non paradoxal. Les contraintes produisant la faisabilité ou la contradiction porte sur la structure de sa définition et non sur la structure de l'objet. C'est pourquoi, on gagne en compréhension en distinguant deux structures : d'un côté la structure des objets (ici les entiers, de l'autre la structure extérieure aux objets que sont les définitions. Les contrainte exprime donc des affirmations (des vérités, des impossibilités) sur les objets mais aussi sur la structure extérieur aux objets. Tellement habitué à voir les définitions faite pour nous offrir un accès aux objets, on ne discerne pas facilement que la structure qui observe l'objet et séparé de l'objet. Et l'on ne voit pas qu'elle se met à s'observer soi-même; la définition devient l'objet de l'observation. Ce sont les contraintes extérieures aux objets qui produisent vérité ou erreur, et c'est sans rapport avec l'objet à définir. L'habitude des contraintes simple nous fait croire que la vérité produite se rapporte à de curieux objets. Du moment où l'on saisit qu'il y a deux structure en jeux (les objets et les définitions de ces objets) qui sont distincts, on aperçoit que la vérité ou la contradiction porte sur la structure des définitions. La structure des objets n'entrant en pas en jeu dans les contraintes validantes ou invalidantes, peut-on dire qu'on a définit un objet ? Quand on ne dit rien sur eux, n'est pas plus logique de stipuler qu'on a rien

dit. Le paradoxe de Berry est un peu plus riche, parce que les contraintes en jeux sont mixtes : la contrainte possède du sens sur une liste qui serait séparée.

La multiplicité des structures en jeux est une notion utile pour l'étude du théorème de Gödel. On y retrouvera des mécanismes similaires concernant, non plus les nombres entiers, mais les démonstrations ; nous y reviendrons. L'idée de « temporalité » apparait aussi clairement, elle consiste à définir un objet à partir d'une structure déjà bien définie. La vacuité apparait parce qu'une définition explicite une contrainte à partir de cette contrainte elle-même. Le paradoxe de Berry, rend la chose assez claire.

Le sens à partir du sens

Ordonner le sens

De ces exemples, je déduis que l'atemporalité pose parfois des problèmes de définissabilité, de « vérité », personnellement je dirais même de non-sens, de défection de l'univocité. Russel a montré que cela se produit aussi dans les systèmes formels simples (avec paradoxes non expurgés) parce que les affirmations des systèmes formels sont à la fois observation et construction.

Pour évacuer ce problème, Russel a construit la théorie des types pour que l'observation soit toujours dissociée de la construction : on affirme des choses que sur ce qui est bien définit.

Le système ZF a posé l'axiome de compréhension à demandant que les ensembles n'existent qu'en prenant des objets dans des ensembles déjà bien définis. Ainsi, dans le pur esprit du « tout en un » à contrainte locale, le mécanisme de « bonne construction » est lui-même définit « localement ».

On constate que ce sont bien là deux traitements de ce même problème que nous avons soulevé. Le système Neumann–Bernays–Gödel (NBG) a choisit une autre voie. Cette voie consiste à ne plus regarder les objets existant derrière les contraintes, mais à se concentrer sur les seules contraintes, de sorte que les objets « contradictoires » restent valides, ils doivent juste être mis en quarantaine pour ne plus avoir de relation avec ce qui pourrait être contradictoire. En effet, tout est permis en Mathématiques, tant qu'on n'énonce pas des contradictions. Or ces systèmes formel fonctionne tellement bien par ailleurs qu'il inspire une grande confiance : on a plus besoin de s'intéresser aux objets, la manipulation des contraintes suffit entièrement à en parler. Cette confiance dans les contraintes comme fondement, plutôt que dans les objets « inutiles » sous-jacents, produit l'insatisfaction devant une interdiction arbitraire : pourquoi interdire « les contraintes qui s'appliquent à soi », ce sont des contraintes comme les autres qui ne produisent aucune contradiction si elles sont bien organisées. C'est une possibilité mathématique « positive » que d'accepter ces contraintes qui ne sont qu'apparemment contradictoires. C'est un raisonnement naturel, un sentiment logique, lorsque les contraintes sont vues comme fondement.

Mais en faisant cela, on a perdu pied avec l'objectif du cadre des contraintes : concentrer l'observation des objets. En faisant cela, les contraintes deviennent l'objet

des mathématiques. Et c'est bien là, un réel mouvement de la logique classique que d'avoir déplacé la réalité des objets sur les contraintes. Les contraintes concentrant la réalité et apportant la fiabilité, le principe du rasoir d'Occam consiste à se séparer des objets extérieurs devenu inutiles. Le langage symbolique est devenu le centre de la réalité mathématique.

Fondé sur cette réalité, le symbolisme ouvre de nouvelles perspectives : au-delà des objets « normaux » définis par les contraintes « faites pour », on découvre de nouveaux objets qui fonctionnent tout aussi bien (les classes au dessus des ensembles). N'a-t-on pas produit quelque chose de plus grand, la logique ne nous a-t-elle pas ouvert les porte d'un nouveau monde ? Sous ma perspective, pas vraiment. C'est comme si pour observer les entiers je les multipliais par 2, j'obtiens les nombres pair. Depuis lors j'étudie toujours les nombre entier « au travers de » leur double, en finissant par penser qu'il n'y a plus qu'eux. Un jour, je découvre qu'il n'y a pas '3' dans mes nombres, je m'empresse de l'ajouter, en disant j'ai trouvé « de nouveaux entiers ». Ai-je fais mieux que les entiers ? Mon pouvoir expressif est-il vraiment plus riche ?

A mon avis, pas vraiment, ce n'est qu'une question d'interprétation. Ces nouvelle « choses », parlent-elle vraiment d'autres choses que d'elle-même ? Elles sont bien des objets manipulables comme les autres, mais de qui parlent-elles ? Dans un monde où l'objet est la contrainte, il se trouve que ça n'a pas d'importance de savoir « de qui elles parlent ». Chercher le monde des objets sous-jacent est une interprétation, et ça n'a pas de valeur. La contrainte est le fondement, voilà l'intuition qui conduit à un tel modèle. Mais voir des objets dans « ces nouvelles choses » n'est-il pas aussi de l'ordre de l'interprétation ? Quelle différence ? La différence c'est que dans le premier cas, il doit exister un mécanisme univoque de traduction qui partant d'une contrainte permet de reconstruire l'objet alors que dans le deuxième, il n'en existe pas. Ainsi la richesse expressive n'est qu'une interprétation interne. D'ailleurs à vouloir rêver de nouveaux mondes, ne pourrait-on pas enrichir bien davantage nos systèmes de beaucoup d'autres nouveautés… il y a bien davantage que le 3 à trouver.

Comme les nombres impaires sont aussi des nombres, quelque que soit le système formel qui décrivent les objets mathématiques, il est lui aussi un objet mathématiques. S'il décrit au travers de liens bien définis, il est au rang des objets bien formés. La vocation de ces systèmes est de plonger les objets mathématiques dans un cadre restreint pour pouvoir les étudier avec facilité. Produire de « nouveaux objets » sur la base d'une extension de l'interprétation qui était sensé réduire les mathématique, c'est réaliser le chemin inverse à l'objectif du départ qui était de réduire les mathématiques. En faisant cela, on a oublié que l'objectif de ce plongement était l'efficacité, l'accès homogène et circonscrit. N'est-ce pas les objets dont parle le système qui formait l'objectif du système, et non le système lui-même. Ne s'agit-il pas d'un Narcisse, qui prenant son reflet pour la réalité, se met à parler avec lui-même. A trop regarder le système réduit, on finit par y voir de « légitimes » éléphants roses, résultat d'un cadre de manipulation interprétatif. Ainsi au lieu d'ouverture et de « nouveauté », NBG me parle d'enfermement, de la réification de nos concepts interprétatifs, de l'oubli du monde extérieur pour un petit monde qui n'est qu'une fraction. C'est un curieux retour de manivelle : voulant chasser la vue des objets derrières la contrainte qui se suffit à elle-

même, on est conduit à voir de nouveaux objets… difficile de se séparer de l'interprétation.

Pour qu'un objet soit bien défini, ne doit-il pas être construit au dessus d'un autre objet bien défini ? A moins bien évidemment de définir en pensant que les objets sont les définitions ; auquel cas toute liberté est permise, mais pertinence n'est pas acquise. Le sens se construit par liaison à quelque chose d'autre que lui-même. Je résume cette perspective en disant que le sens se construit au dessus du sens. L'ordre d'imbrication des contraintes dans les définitions est important. Face à l'atemporalité constitutive des systèmes initiaux, les systèmes qui ont voulu resté « réalistes » ont du réimporter la temporalité de la définition pour subsister dans la cohérence.

On peut en effet « parler tout-en-un » avec efficacité, c'est un pilier du succès mathématique symbolique (pensons à l'invention de la variable). Mais pour définir, la temporalité, le pas à pas, la construction étagée, ordonnée, sont un mécanisme de sens incontournable. Dans un contexte « tout en un », une définition bien formée doit rendre possible et univoque (mais pas forcément explicite) l'ordre qui permet de reconstruire l'objet global définit par les liens locaux. Définir « tout en un » permet en effet d'exprimer implicitement l'accumulation ordonné de sens.

Vu ainsi le « tout en un » n'est pas le socle, le « pas à pas », la définition ordonnée de liens est incontournable à sa compréhension. En posant le « tout en un » au fondement des mathématiques, on a confondu utilité, efficacité avec nature profonde.

Objectalité

En poussant un peu plus loin, je propose de voir que même quand les systèmes formels ont bridé leur définissabilité pour produire une définissabilité temporelle, il conserve une perception assez éloignée de la construction de sens par accumulation ordonnée. La résultante de « l'esprit tout-en-un », c'est le non-contradictoire. Pour imager cela, je dirais que le paradoxe non paradoxal est le bien venu, s'il était défini rigoureusement (et c'est possible dans le système utilisé pour le théorème de Gödel). S'il avait été possible de retirer seulement les contradictions, les systèmes auto-définitionnels auraient été acceptés. Seule la contradiction gêne et ces contradictions apparaissent comme un malaise des systèmes formels, non pas comme une évidence de non sens. On y trouve l'origine d'un système NBG : on ne comprend pas pourquoi il faudrait retirer des choses qui fonctionnent par ailleurs.

Et pour prendre un exemple qui concerne tous les systèmes formels : on perçoit le regard centré sur les contraintes, quand on ajoute des axiomes (des contraintes) qui, au lieu de décrire les objets, possèdent un rôle de manipulation de ces objets. Ainsi les liens décrits ne sont plus ceux d'un objet extérieur, ils ne sont plus la description permettant le déploiement de l'objet, mais une « permission » de manipulation. Les axiomes ne portent plus sur la structure extérieure (les objets), mais intérieure (la manipulation des contraintes). Quand on voit sous une seule apparence les affirmations extérieures et intérieures, quand on ne distingue pas la structure des objets de la structure qui les manipule, on peut dire que les seuls « objets » sont devenus les contraintes manipulatoires. Le fait d'avoir traduit les objets extérieurs dans un cadre manipulatoire de contraintes mène facilement à cette indistinction de sens : quoi de plus

naturel que d'ajouter « des manipulations » aux descriptions d'objet, sachant qu'on est dans un cadre fait pour cela.

Dans cette direction, on peut construire des objets satisfaisant tous nos désirs de manipulation, pourvu qu'il soit non contradictoire. Et c'est là que naissent toute les difficultés du « bon choix des axiomes ». Par exemple l'axiome du choix a pour objectif de faire exister des objets sans avoir à les rechercher. Plutôt que de les trouver selon une méthode qui va différer selon chaque structure, on annonce d'entrée que le choix d'objet est un mécanisme naturel, et l'on construit « la contrainte d'existence d'un objet ». La question de savoir s'il est intuitif de pouvoir systématiquement choisir un objet ne me semble pas la bonne question, la question est plutôt de connaitre le rôle d'un système formel : est-il un accès au monde, ou bien est-il devenu le monde. On verra que l'axiome du choix possède une réelle pertinence restreinte à certains contextes. Dans le cas général des contextes « tout en un », l'axiome du choix peut produire des choses curieuses… on pensera au paradoxe de Banach-Tarsky où l'axiome du choix permet d'accéder à « Tout l'espace » par simple décision manipulatoire.

Ajouter des axiomes de manipulation d'objets ne pose aucun problème « logique », mais un problème interprétatif : on ne parvient pas à manipuler sans penser qu'on parle de quelque chose. Et les « objets » produit par ces axiomes ne sont plus les objets initiaux dont on a l'impression de parler puisqu'on a ajouté des contraintes. Je parlerais « d'objet à assistance manipulatoire », et il trompe l'intuition primitive de croire qu'on parle des objets extérieurs. Ces objets-manipulatoire sont formés des objets de départ, ayant bien les contraintes « voulues », auxquels on ajoute des contraintes de manipulation et donc une autre structure que celle de la description des objets. Ce sont des objets à cheval sur deux mondes, le monde observé et le monde formel de l'observation. Le monde de l'observation devient ainsi un monde hybride d'objets-manipulatoires.

C'est non seulement possible (non contradictoire), mais c'est aussi très utile pour manipuler rapidement les objets, pour arriver rapidement aux théorèmes qui concentrent l'observation des objets. Mais ces théorèmes parle-t-il bien toujours des objets auxquels ont pense. En pratique, c'est en général le cas ; à moins de s'intéresser justement à des questions de nature manipulatoire sur ces objets-manipulatoires. « L'interprétation » devient alors difficile : de quoi parle-t-on de manipulation ou d'objet ? Je défends ainsi l'idée qu'il faut être conscient de la nature des objets et des liens manipulés qui ne sont plus les objets de départ.
Mais cela pose un autre problème d'ordre un peu plus éthique : à ce jeu, on peut créer toute les manipulations que l'on veut. Quand elles sont choisie en fonction d'une valeur sémantique forte (comme l'axiome du choix pour éviter les recherches pénibles dans la complexité des objets, ou pour, on le verra, des utilisations « encore plus légitime »), le résultat est pertinent parce qui correspond à une interprétation « naturelle » entre les affirmation et les objets de ces affirmations (hormis les effets pervers consistant à appeler « objets » les « manipulations » conduisant à la difficulté d'interpréter ces manipulations dans le monde extérieures des objets). Le problème le plus gênant est ailleurs , il réside dans le fait de pouvoir ajouter toutes les manipulations que l'on veut sans restriction de pertinence. Quand on considère qu'on interprète inévitablement ce

qu'on manipule, on travaille dans un monde sans frontière entre la perception et l'illusion.

Voici donc la perspective que je cherche à produire à l'encontre de la vision classique des mathématiques : être conscient de la différence fondamentale entre l'objet et l'affirmation sur l'objet. La césure sans être indispensable, s'impose dès que l'objectif consiste à … observer. La frustration des systèmes formels à ne pas manipuler la totalité des possibles provient du simple oubli de leur rôle initial : homogénéiser pour mieux observer, et pour cela il fallait justement …réduire. N'est-il pas plus sensé de se concentrer sur les objets eux-mêmes ; avec toute liberté de prendre des raccourcis manipulatoire… dont il faut en être conscient. Il n'y a pas de « césure obligatoire » entre les deux mondes, c'est une question d'objectif : voir ou construire il faut choisir. C'est un mécanisme humain que de tisser des liens en tout sens. Ce qui conduit à se positionner à cheval sur les deux mondes, sur les deux objectifs. Mais il ne faut pas, comme cela a été fait, s'enfuir dans le monde de la simple pratique mécanique pour ne pas énoncer ses propres …attentes.

C'est à en perdre le sens même de la pratique manipulatoire, quel sens y-a-t-il à générer « une pratique totale » qui ne signifie rien, qui génère la cyclicité de la logique dès qu'on passe d'un mode à l'autre : construction-observation, le serpent qui se mord la queue. La schizophrénie de l'incomplétude consiste à constater que constater peut encore être constaté. C'est ainsi que s'est constituée la logique moderne, avoir trouvé une pratique manipulatoire homogène réduite, cela ne suffisait pas. Il fallait maximiser cette pratique réduite. La théorie des ensembles naïves a été renouvelées par des théories toujours plus « expressive » (on se demande qui est naïf). Skolem a guidé des générations de logiciens. La question n'est-elle pas celle de la nature et du rôle qu'ont attend des systèmes formels ? A vouloir fonder, englober les mathématiques et à la fois les manipuler, on en oublie ses propres objectifs : on ne peut réduire les mathématiques à un système sans … réduire. Inutile une fois qu'on a construit un système restreint pour parler du « tout », de l'étendre pour parler au-delà du tout, c'est une illusion.

Il me semble naturel de voir les systèmes formels comme un accès fidèle au monde des objets (dont les système formel font partie bien sûr, mais se concentrer sur ce point à peu d'intérêt). Rien n'empêche de changer les règles, et de manipuler une interaction entre le monde et l'outil. C'est très humain de mélanger les concepts, et c'est même très utile ici. Je propose juste l'idée d'un gain d'efficacité à être lucide sur le sens de nos pratiques, sur la connaissance des liens qui unissent le monde de l'observation au monde des objets. Encore faut-il savoir ce qu'on veut…
Une nouveauté des mathématiques formelles : il est possible d'avoir le beurre et l'argent du beurre : en s'achetant le beurre, à soi-même. Encore faut-il en voir un.

Un fondement

L'idée que « Le sens se construit sur le sens » laisse penser qu'il n'y a peut-être pas de fondement possible pour le sens. Qu'il existe toujours une requalification possible et nécessaire des concepts. Que le sens n'est toujours qu'une apparence, qu'un choix subjectif, qu'un positionnement d'interdépendance. Tout cela conduit à un inhérent pyrrhonisme envers les fondements. La difficulté, c'est qu'une telle croyance semble

tellement éloignée de la nature si rigide et univoque, si efficace et non floue des mathématiques. Wittgenstein s'est pourtant convaincu à ne voir dans les pratiques mathématiques que des conventions. Mais d'où viendrait alors cette implacable efficacité des conventions mathématiques. En d'autre lieu, où on les a beaucoup jalousées, pourquoi de même convention sont tellement moins garante de fiabilité, d'efficacité.

Nous ne résoudrons pas le fond du problème parce qu'il existe forcément des liens qui tissent tout tentative de fondement avec le langage, avec la vie, avec la totalité du sens qui nous dépasse. Cependant, mon aisance face à ces interrogations provient d'une idée qui a précédé mon approche des mathématiques. Elle s'est révélée comme un fondement relativement pertinent à mes yeux. Certes non absolu, mais suffisamment vaste pour donner une impression d'unité aux mathématiques, et produire une certaine césure entre « le mathématique » et le « non-mathématique ». Ce fondement, j'en reparlerai, c'est le concept abstrait de « liens entre des cellules vides » autrement dit la notion de schéma. Ce qui promet beaucoup de chair et un très petit squelette aux mathématiques. Les schémas forment un sens au dessus du vide par leur inter-liaison. Le sens vide, la cellule, est un sens « primitif » ; il permet de construire des schémas complexes au dessus du vide. Et c'est un fondement plus riche qu'il n'en à l'air de prime abord.
La possibilité d'un fondement m'apparait alors comme la différence entre les mathématiques et les autres lieux. N'est-ce pas là les mathématiques : la construction univoque au dessus d'un fondement quasiment vide ? Alors que le monde est indéfectiblement tissé de toute part, la pratique mathématiques consiste à isoler, à fonder, à abstraire, à vider tout ce qui n'est pas univocité. Nous en reparlerons, mais il nous fallait appréhender tout de suite l'idée de fondement avant d'aborder la suite.

Direction

On constate que dans l'idée « Le sens se construit au dessus du sens » existe une réorientation profonde de la perspective classique ; une réorientation qui se décline en plusieurs directions :

- la notion de temporalité ou d'ordre de construction.
- L'utilité d'un fondement.
- la notion de césure entre objet et observation.

Construire le sens au dessus du sens est forcément plus contraignant que de rechercher la seule non-contradiction. C'est une question fondamentale du positionnement humain dans la vie : ne pas avoir de problème est moins contraignant que créer du sens. L'apologie du sens versus l'indifférence du non-sens est aisée, à moins que ... tellement personnelle.

La diagonale de Cantor

On retrouve ce problème de « tout en une fois » dans l'interprétation de la diagonale de Cantor. Ce raisonnement est un pilier du théorème d'incomplétude de Gödel. On s'y arrêtera donc un instant.

Deux versions

Le raisonnement diagonal de Cantor possède originellement deux versions :

- Version 1 : celle des parties de N où l'on raisonne à partir d'un tableau avec une infinité de colonnes remplies de 0 et de 1. Chaque colonne définit une partie de N (un ensemble de nombre) par les 1 signifiant « présent » et les 0 « absent » pour chacun des entiers. La suite de 0-1 formée des « contraires de la diagonale » décrit un ensemble qui ne peut être dans aucune colonne sinon le nombre commun porterait une contradiction, il devrait être égal et contraire à lui-même.
- Version 2 : L'autre version consiste à établir une bijection hypothétique entre un ensemble et celui de toutes ses parties. En formant sous cette hypothèse, l'ensemble des nombres non présents dans leur 'bijectif', on peut s'interroger si lui-même est dans son 'bijectif', et cela produit le même type de contradiction.

C'est le deuxième raisonnement qui va nous intéresser ici. Il est originalement exprimé dans le cadre classique, le deuxième raisonnement repose pleinement sur la perspective « tout-en-une-fois ». La contradiction repose sur « l'élément diagonal » à l'image de la première version : le nombre en bijection avec l'ensemble des nombres qui ne sont pas dans leur 'bijectif'. Dans ce raisonnement, on a un procédé de définition qui construit un objet à partir de son observation. Il est définit par les liens d'appartenance de façon intemporelle. Comme pour le Barbier, il doit contenir tous ceux qui ne se contiennent pas. Or c'est évidemment impossible dans une approche temporellement ordonnée. Une observation ultérieure produirait une contradiction. Il y a donc deux points de vue :

- On raisonne en acceptant intuitivement le point de vue « tout en un ». Puisqu'on accepte a priori que TOUTES les parties existent de façon atemporelle, la définition de l'ensemble diagonale est l'une de ces parties. La contradiction porte alors sur l'impossibilité d'une bijection et non sur l'impossibilité de la définition. « Pas de bijection possible » est alors vu comme l'idée de « plus grand », immensément plus grand.
- Le point de vue temporel qui n'imagine pas que le sens soit construit au dessus de quelque chose qui n'est pas encore bien défini. Dans ces conditions, on ne peut pas imaginer que « l'ensemble diagonal-inverse » existe avant d'être explicitement construit au dessus d'ensembles bien définis. La contradiction porte alors sur les mots « TOUTES les parties ». Comment pourrait-on considérer que l'observation porte aussi sur l'ensemble à construire, ce serait construire sur sa propre observation, comme on l'a observé pour le « barbier schématique » ou pour le « paradoxe non paradoxal ». Dans ces conditions, il n'est tout simplement

pas possible d'être « différent de soi-même », ainsi la version 2 se présente comme une définition contradictoire. Par contre, en construisant temporellement à partir de n'importe quelle liste de partie en bijection définie explicitement avant la construction diagonale-inverse, on peut considérer que la construction produira bien un ensemble nouveau et différent de chaque colonne. Si l'on se place face à des objets et non face à des illusions d'objet-manipulatoire, il faut que la définition se situe en dehors de la structure pour définir un objet sensé.

Un autre argument assez persuasif a beaucoup aidé à l'interprétation classique de la diagonale de Cantor : pour un ensemble fini, ses parties sont en plus grande nombre que ses éléments (2^n contre n), on constate donc l'impossibilité d'une bijection. On a alors assimilé l'impossibilité de bijection de la diagonale de Cantor à cette impossibilité de bijection finie ; d'où l'idée de « grandeur » des parties d'un ensemble. La notation des cardinaux est suggestive à cet égard : on parle de 2^N contre N. L'un est un arbre combinatoire l'autre est une chaine linéaire. La différence de quantité semble manifeste. Seulement à l'infini, ce raisonnement peut être tempéré car il apparait une autre réalité : on perd l'idée que la différence de « quantité » ne peut pas être mise en bijection. Par exemple, on peut mettre en bijection les nombres carrés avec tous les nombres par $f(n)=n^2$. Il y a toujours un carré un plus loin. Ainsi le raisonnement de « la quantité » repose sur une analogie et pas du tout sur une structure d'objet défini univoquement. Cette analogie est mise à mal de façon immense par tous le reste de la réalité, il est assez incroyable de voir tout ce qu'on peut mettre en bijection avec N (on peut penser au théorème de Gödel par exemple). Quel est donc la nature de ces « ensembles des parties » pour se comporter différemment des autres ensembles, quel est leur secret ?

L'analyse que j'ai produite de la version 2 de Cantor me montre que face à toutes données explicites d'ensemble, on peut toujours reconstruire un nouvel ensemble. De ce mécanisme, il me semble qu'il ressort tout simplement « l'impossibilité d'énoncer à l'avance Toutes les parties ». Non pas à cause de la taille, ni d'un problème de <bijection> d'une partie atemporelle avec une autre, mais tout simplement parce qu'on ne peut pas tout construire. Et pour la raison simple que toute construction donnée permet de reconstruire un nouvel ensemble différent. C'est le fait d'imaginer que tout est déjà construit à l'avance qui produit la contradiction. L'idée que le sens se construit sur le sens conduit à l'idée d'une impossibilité de saturation du sens. Le sens peut toujours se déployer à partir d'un sens existant, il n'est pas limité. Sous cette perspective, on ne peut aucunement dire « prenons les toutes et après construisons… ». Une telle pratique est une construction à partir du contraire de soi-même, ce n'est pas seulement contradictoire, c'est insensé par définition. Si le sens ne possède pas de limite quel est donc le sens d'une phrase comme « tous les sens possibles». On est loin d'avoir idée de tout ce qu'il est possible de faire…

Si on reproduit l'idée de Cantor dans un contexte à construction de sens ordonné, on choisirait une structure déjà bien constitué d'ensemble, puis en construisant un ensemble « différent de chacun », on produit effectivement un ensemble nouveau. Cantor nous montre ainsi qu'en construisant « différent de tous ce qu'on a déjà fait», on construit un « nouveau sens ». Cela n'est possible que si l'on dispose d'un moyen de construire le contraire effectif de chacun, autrement dit que si l'on dispose d'un moyen

effectif de parcourir ce qui est déjà construit. Par exemple une indexation des ensembles qui permettrait de connaitre le contenu des ensembles à partir de l'index par un procédé bien déterminé. Et l'on découvre là, la cause de la résonnance qui s'est faussement produite avec la notion de bijection. La bijection n'est qu'un moyen de parcours parmi beaucoup d'autres de produire un accès. En s'en éloignant, on comprend que la notion utile est celle de définition, de moyens d'accès. Pour construire autre chose, il faut un accès univoque à chaque chose déjà construite et à son contenu. Autrement dit, il faut que les définitions soit « accessibilisante ». L'indexation pourrait être bigrement complexe (fortement non linéaire), mais on ne peut construire le « contraire » que de ce dont on a un accès bien défini.

En revisitant ainsi Cantor, l'idée de bijection définit dans un environnement « tout en un » apparait comme floue, elle ne parle pas d'accès réel, mais seulement potentiel. Elle ne fait que « simuler » un accès, ce qui lui accorde une certaine confiance. La contradiction repose sur un accès-contenu auto-contradictoire par l'analyse de la définition sans parler d'aucun positionnement. Dans une perspective de construction ordonnée, Cantor possède une richesse bien plus élevé que la contradiction généré par l'aspect « tout en une fois », c'est l'idée de construction de nouveau sens.

Le rêve ou le labeur

En généralisant le principe pertinent de Cantor, on trouve que face à tout ensemble d'objet, si on dispose d'un moyen d'accès à ces objets permettant d'identifier leur structure interne, il est possible de construire un objet différent de chacune de ces structures. En faisant cela, on construit quelque chose de nouveau. Tous les contextes ne se prêtent pas à cette construction de « contraire ». Il faut un contexte où l'on peut accumuler sans limite des choix entre des objets. Les moyens d'accès ce sont les définitions, les procédures, les mécanismes, les algorithmes qui relient les objets.

Remettre en cause la totalité plutôt que la bijection, n'est-ce pas blanc bonnet et bonnet blanc. Peut-être n'est-ce pas si éloigné que cela, à la nuance près qu'il y a un peu moins de gloire à considérer qu'«on ne peut jamais réaliser qu'un pas à la fois au dessus de ce qu'on a déjà» plutôt qu'à « imaginer cueillir le mystère au cœur de la totalité insondable». On constate encore une fois, que c'est à nouveau le « tout en une fois » pris comme cadre intuitif qui dévoie notre perception. La liste des changements de perspective commence à s'allonger, on constate que le « tout une fois » nous suggère beaucoup dévoiement intuitif … en une seule fois.
Les deux lectures de Cantor (« tout en une fois » ou « construction ordonné ») nous suggère une interprétation somme toute bien différentes : dans un cas, Cantor nous a ouvert une porte dérobée vers les mystères cachés de l'immensité de la totalité du monde. Dans l'autre, le même Cantor est celui qui nous interdit d'accéder au TOUT, parce qu'on peut faire qu'un pas de plus que TOUT... ce qu'on a déjà fait. Et le mot « tout » n'a alors pas du tout le même sens dans les deux phrases, l'un parle de ce qui n'est pas là, l'autre de ce qui est effectif.

Forme : liberté et accès

N'est-ce pas aller trop loin que d'interdire de parler de « Tous les ensembles d'entiers » ? Ca semble si simple de reconnaitre si un ensemble est fait d'entiers. Pourquoi donc s'interdire de parler de Tous. En fait, il y a deux notions à distinguer. Et cette distinction va être un fondement de la perspective des mathématiques :

- La notion de « forme ». Une forme parle de tout sans définir aucun contenu parce qu'elle définie au travers de choix possibles. Une forme c'est l'idée d'une liberté. L'idée de forme s'oppose à l'idée de contenu explicite. Par exemple les ensembles d'entiers présentés par Cantor peuvent être vus comme une suite d'entier 0 ou 1. Aucune précision n'est donnée sur le choix de ces valeurs.
- La notion d'accès complet. C'est le moyen de définir complètement un objet sans ambigüité de sorte que tout y est univoquement précisé. On peut parler d'une définition complète : il faut avoir un moyen, une procédure, un algorithme, … pour accéder à toute la réalité de l'objet, sans aucune ambigüité, ni liberté possible. Par exemple, l'accès complet à un ensemble consisterait à posséder explicitement un algorithme donnant les valeurs des choix 0 et 1 qui définissent l'ensemble.

Il est clair que la forme dont parle Cantor pour désigner les ensembles d'entiers est simple. Il est particulièrement efficace : c'est une suite itérative infinie d'un choix entre 0 ou 1. Cela nous met en contact directe avec l'idée d'ensembles d'entiers. On égraine les entiers ; 1: on le prend, 0 : on ne le prend pas.
Une forme est un conteneur de « beaucoup de choses ». C'est une structure qui possède la possibilité de choisir. Et c'est une notion mathématique délicate que la liberté, elle est généralement passée sous silence. Elle est fondamentale dans le principe de condensation de l'information. Dans le contexte de Cantor, choisir entre 0 ou 1, sans s'arrêter définit une forme.
Une forme est-elle univoque ? Oui en ce qu'elle définit un processus de reconnaissance explicite. Oui en ce qu'elle peut-être définie dans des cadres formelle où sa manipulation est univoque. Non en ce qu'elle ne définit pas une réalité univoque puisqu'il y a une liberté. C'est son interprétation qui n'est pas univoque. On peut parler d'une réalité « relativement univoque ». Les formes définissent des informations manipulables, même si elles ne sont pas complètes. (On peut voir par exemple le rapport qui existe entre la liberté de choix et le concept logique du connecteur 'ou'.).

Le problème du Tout dans un contexte « tout en un » est de placer les formes et les objets à accès complet, sous le même descriptif qui ne permet pas de les différentier. Et l'on associe la forme aux contenus possibles. En remplaçant le concept de Tout par l'idée de forme, on donne une place au manque d'information, à la liberté. Une forme apporte du sens ; elle définit, mais ne dit pas tout parce qu'elle contient l'idée de choix. La forme ne dit rien sur la façon de procéder à ces choix. Pour donner un contenu précis dans une forme ayant une infinité de liberté, il faudra définir procédé à une infinité de choix. Se pose la question de l'accès à ces choix, de la définition d'un objet complet inscrit dans une forme.

Il est possible de construire un procédé de remplissage complet du tableau. Il ne s'agirait que d'un remplissage particulier. Peut-on construire un algorithme qui construirait toutes les suites de choix possibles ? C'est justement la question à laquelle Cantor semble dire non. Philosophiquement, ce serait faire UN choix qui permettrait de faire TOUS les choix. Il semble bien que la liberté ne soit pas compressible.

Comment faire alors pour définir des choix :

- 1ère approche : choisir au hasard, sans aucune raison, sans aucune compréhension du choix. C'est la liberté.
- 2eme approche : choisir selon une logique univoque qui établit les choix a partir d'un processus de construction univoque.

Comment pourrait-on aborder la première approche dans un cadre mathématique, puisque par essence, elle se refuse à définir des liens univoques. Est-il réellement possible de choisir librement en mathématique ? Une forme « permet » de laisser un choix libre, mais peut-elle choisir ? Comment pourrait-on choisir autrement que par un procédé de construction qui statue sur chaque choix au travers d'un parcours de la structure; de sorte que chaque choix disparaisse. En résumé, il faut un accès au choix, cumulé d'une valeur pour chaque choix. Ce qui est désigné n'est plus libre.
On pourra aussi imaginer des structures hybrides ; on ne choisit qu'une part des libertés imbriquées disponibles. C'est d'ailleurs le cas le plus fréquent en mathématique.

Revenons à la diagonale de Cantor. Dans son raisonnement Cantor n'a exposé qu'une forme : un ensemble d'entier par une suite de 0 ou 1 au choix. Il défini ensuite un objet complet théorique (un ensemble particulier) à partir d'accès hypothétiques. Comme l'objet final possède aussi la forme voulue (une suite de 0 ou 1), il s'agit d'un raisonnement sur les contenus possible de cette forme. La construction du nouvel objet n'est possible en réalité qu'au travers d'un tableau complété. Or aucune proposition d'accès complet n'est proposée. Seul un accès par des bijections qui ne sont que des accès hypothétique et pas une description précise d'un remplissage de tableau. L'objet auto-contradictoire n'est donc pas construit au dessus d'un accès bien défini, mais à l'intérieur d'une forme, à l'intérieur d'un ensemble de contraintes non complète. La leçon est claire: on peut construire du nouveau au dessus de n'importe quelle forme complétée, alors que dans le mode « tout en un », l'idée d'accès complet est contradictoire. Une fois identifié la notion de forme et d'objet complet, on constate que le procédé de définition suppose un accès complet alors qu'il ne présente qu'une forme, en construisant de façon contradictoire au dessus du vide, ce procédé de définition n'est pas recevable.

Le contexte « tout en un » classique, s'exprimant par des contraintes, n'offre aucune prise sur la différentiation entre un objet complet et une forme possédant des libertés (il ne permet pas non plus de distinguer une définition contradictoire). C'est l'analyse des contraintes qui effectueront ces distinctions. En obscurcissant cette césure, les mathématiques ont mis au même niveau l'univocité et la liberté, les descriptions partielles (les formes définies par la liberté) et complètes. Ce qui a donné l'illusion que les unes parlaient des autres.

Je propose au contraire de voir qu'une contrainte ne dit rien d'autre que le contenu de cette contrainte. Une forme libre est une information moins précise qu'une forme complète. Cela renverse la perspective intuitive des contraintes : au lieu de voir tous les possibles derrière une contrainte, je propose au contraire de ne voir que l'information effectivement écrite. Sous ce regard les mots « quelque soit x » ne signifient pas « tout les possibles », mais plutôt « lieu de liberté… vide ». N'ayant rien dit d'effectif, on a rien dit. La liberté est une interprétation non définie univoquement. « Imaginer les possibles » est une sémantique ajoutée, mais pas d'une information définie. Ce retournement produit une lecture contre-intuitive du contexte classique : on ne voit dans des systèmes axiomatiques généraux que des « petits schémas » qui n'expriment que peu d'informations. Placé dans la théorie des ensembles avec la notion d'appartenance vue comme un simple lien, il s'agira explicitement de « petits schémas ».

Cadre de définition

Dans une approche « temporelle », la leçon à tirer de Cantor est que tout procédé de construction explicite ne sera pas exhaustif, une construction nouvelle est toujours possible. Il est intéressant d'observer cette question au niveau du cadre de définition des objets. Pour cela, il faut étudier le lien entre définition et objet construit. Imaginons que l'on travaille dans un cadre univoque permettant d'identifier les définitions bien formées. Ce sera par exemple un système formel classique, un langage de programmation, une machine de Turing, le cadre des fonctions récursives, le lambda calcul, etc.

Supposons que, dans un tel cadre, on propose une définition (parmi de nombreuses possibles) permettant de remplir toutes les cases du tableau (version 1) de Cantor. On peut supposer que cette définition sera finie. En fait, il s'agit d'un présupposé : toute définition mathématique exprimée univoquement possède une expression initiale finie. Même dans le cas audacieux où l'on désigne une liste infinie de définitions, si cet ensemble est bien défini, c'est qu'il est lui-même issu d'un processus fini de définition générant l'ensemble des définitions. C'est avec un nombre fini de symboles au départ que s'exprime toute définition (jusque là, on avait jamais vu de livre infini, ça devient possible avec les ordinateurs, mais c'est toujours généré initialement par un mécanisme fini de répétition). Bien sûr, pour que ce discours soit recevable, il faut que les définitions exprimées soit précises, sans artifice non formalisé. Quand il ne s'agit pas d'un procédé univoque, nous sommes un peu désarmés à étudier le sens des définitions. Nous sommes, ici, au cœur du problème de la définition. Qu'est-ce que le vague, qu'est-ce que le bien défini, qu'est-ce qu'une définition ? Avec un fondement théorique ce serait plus facile, nous en proposerons un. Caricaturalement, une définition doit donner les moyens de « reconnaitre » l'objet dont elle parle (c'est valable pour les formes comme pour les objets complets). Si l'objet est complet, elle doit donner les moyens explicites de le « construire ».
On constate que le processus de définition lui-même est confronté à la dualité « forme - accès complet ». Si la définition ne produit pas un accès complet, mais une forme, on ne fait qu'imaginer « les possibles » présents sous cette forme. Il s'agit d'un espace infini quand la définition suggère une infinité de libertés. Un tel objet est défini par un procédé fini et semble posséder une réalité qui dépasse sa définition finie. C'est le manque de

césure forme-accès qui produit ce sentiment de dépassement de la définition. Si l'on voit chaque définition comme apportant les seules informations qu'elle définie explicitement, on comprend qu'une forme ne définit pas ses contenus possibles. Elle permet de les reconnaitre, mais n'y donne pas accès. En posant cette césure forme-accès, on considère qu'une forme ne définit pas les accès complet. Les symboles finis exprimant une forme n'expriment que la forme. Dans un cadre constructif, c'est justement cette césure que Cantor nous révèle : on ne peut pas définir un accès complet sur la forme des « ensembles d'entiers ». Le sentiment qu'une forme nous « parle des accès complets » est le lieu d'interprétations abusives (pour le procédé diagonal de Cantor et pour beaucoup d'autres raisonnements). Une forme ne définit rien de plus qu'une forme. Si on veut définir un accès complet, il faut fournir à cette forme des valeurs pour chacune des libertés qui réside en ses choix.

Le théorème d'incomplétude de Gödel nous donnera une vision plus fine des possibilités d'accès par le mécanisme de la définition en construisant un « cadre de toutes les définitions possible » qui donnera l'impression de parvenir à enfermer tous les possibles sous un simple mécanisme. C'est un cadre bien défini de formation de phrase, mais nous verrons qu'il reste toujours la question fondamentale du sens à donner à ces phrases.

Etcetera

Une question importante des mathématiques, que nous avons passée trop rapidement jusqu'ici, est comment est-il possible de définir un objet infini par un procédé fini. Par exemple comment une définition finie peut-elle remplir le tableau infini à double entrée de Cantor. Pour définir une infinité de case, en partant d'une définition finie (un algorithme, une suite, un programme…), le seul moyen est, à un moment ou l'autre, d'utiliser un ou des « etcetera ».

Accès à l'infini

Qu'il soit sous-entendu ou explicitement spécifié (par une boucle 'For', 'While', par l'usage d'un raisonnement par récurrence,…) le « etcetera » est un objet mathématique fondamental, il permet d'accéder au non-fini. Il permet d'étendre sans s'arrêter alors même qu'il n'est qu'un unique mot. Entre une telle définition et l'extension qui en résulte, il y a donc une étape d'interprétation qui consiste à lire et répéter ce qui est définit de façon finie. La répétition est le moyen de produire de l'infini à partir du fini. Il est une source d'accès univoque à l'infini. Est-il possible de croire que la seule façon de ne pas s'arrêter soit de répéter ? N'est-il pas manifeste que l'on peut construire des infinis extrêmement riches ou n'apparaissent aucune répétition ? Ce n'est pas l'objet que l'on observe ici, mais le procédé de construction, de définition. Quand on construit des objets infinis, on répète des procédures, on répète des mécanismes. Au pire, on répète un mécanisme élémentaire comme « passer à l'instruction suivante » dans une machine de Turing. Les objets produits, la mémoire emmagasinée, diffèrent, se complexifient, évoluent, mais le processus de construction initial d'un non-arrêt est fait de répétitions. Une question importante se pose : la répétition est-elle la seule source de l'infini ?

Un autre accès

Un autre candidat se propose : le « tout en un », en particulier le « tout en un » des contraintes symboliques des systèmes formels classiques. Il peut être perçu comme une autre source de l'infini. Au travers de l'idée de formes qu'expriment les contraintes incomplètement univoque, on trouve l'accès à un autre type d'infini. Il semble même être beaucoup plus « grand », beaucoup plus « signifiant » qu'un simple etcetera mécanique. C'est dans cadre que sont nés plusieurs sortes d'infinis (les transfinis, les logiques non standards, …).

Seulement ayant pris conscience de la notion de forme, on sait qu'il ne s'agit pas d'une définition univoque : l'infini dont parle les formes est laissé dans le vague, les objets dont parle ces infinis sont implicites. L'infini provient de l'idée de « contenu possibles » et non de réalités explicites. Il s'agit même parfois d'objets-manipulatoires.

Nous n'avons cessé de supposer que les contraintes symboliques des systèmes formels décrivent des objets. En réalité, les contraintes ne parlent jamais d'objets précis, mais d'une foule de modèles possibles. En se contentant de définir des contraintes sans poser de limite à leur réalisation, rien n'est dit sur l'objet lui-même. Et la satisfaction d'un ensemble de contraintes peut être réalisée par d'autres objets que celui qui a été « modélisé ». Il y a toujours moyen de produire des objets satisfaisant les contraintes énoncées et possédant en plus des structures non exprimées par les contraintes. (Par exemple les règles de calculs dans les nombres relatifs sont définissables par des contraintes qui conviennent aussi aux nombres rationnels). Il existe une foule de structures qui satisfait à des contraintes données : c'est la notion de modèle. D'avoir évacué les objets en se concentrant sur leurs contraintes, une difficulté non négligeable apparait : une foule de candidat à la satisfaction des contraintes se présente, une foule d'interprétations possibles.
Une « bonne » axiomatisation d'un objet donné consiste à donner un ensemble minimal de contraintes qui modélise toute sa structure. En manipulant ces contraintes de proche en proche, on doit avoir accès à toute la structure. Seulement la porte n'est pas fermée à tout ce qui est « plus grand » que l'objet, et de façon plus général à tout ce qui est « compatible » avec les contraintes (qui donne des « réalités » assez curieuses parfois). Dans un contexte « tout en un » où l'on peut en plus définir des objets manipulatoires, on ouvre là la boite de Pandore des « objets» issus de ces définitions.

L'espoir d'avoir « bien défini » est illusoire : une contrainte locale ne définit rien d'autre qu'une contrainte locale. Une forme ne définit qu'une liberté et pas la construction d'un infini. Derrière le TOUT de « tout en un », il y a deux infinis :

- L'un est celui de la manipulation des contraintes de proche en proche : l'infini généré par ce mécanisme est manipulatoire, c'est un infini de nature etcetera.
- L'autre infini est de nature imaginatif, il s'agit de touts les objets satisfaisant les contrainte, seulement cet infini se cache complètement, on en dit jamais rien, on ne fait qu'y penser.

Pour avancer jusqu'à l'infini, il faut construire, il faut relier, il faut dire « etcetera ». Les immenses et mystérieux infinis conçus par le cadre « tout en un » ne sont jamais que

sous-entendus derrière des manipulations… purement finies. Finies oui, mais étant « tout en une fois » elles sont aussi infinies qu'on veut… ou plutôt qu'on imagine.

La source de la confusion est peut-être qu'on ne pratique jamais la répétition du « etcetera », on ne fait jamais que le décrire. Dans l'approche constructive comme dans l'approche imaginative, on se contente de phrases « qui parlent de ». D'où l'idée qu'il s'agit d'une pratique commune. La différence est pourtant que le « etcetera » peut être mis en œuvre et produire une continuité constructive incessante, un « non-fini », alors que l'imagination des possibles ne produit rien d'infini en dehors de schéma manipulatoires fini que l'on interprète comme parlant d'infinis (par exemple une bijection avec une sous partie stricte).

Quelle différence entre « le tout en un » implicite et le « pas à pas » explicite pour parler de l'infini ? Chacun ne fait qu'un seul pas, le « tout en un » se tait alors que le « pas à pas » dit « etcetera ». En dehors de l'interprétation, il n'y a pas plus d'infini dans le « tout en un » que dans le « pas à pas ». Pour accéder à l'infini, il faut soit une dynamique, et mettre en mouvement bien ordonné ce qui est inerte ; soit des schémas manipulatoires suggestifs. C'est l'approche du tout en un. La question qui se pose est la pertinence de ces suggestions, de ces formes manipulatoires nouvelles. Souvent on pourra y voir la simple traduction d'un ou plusieurs « etcetera » imbriqués. Mais que dire des objets qui nous suggèrent qu'ils parlent d'autre chose que de « etcetera » ? C'est bien du silence que sont nés les espoirs des nouveaux infinis. Derrière le « Tout-en-un » il y a le « Tout », c'est à dire l'imagination. Les formes et les objet-manipulatoires ne définissent pas d'objets explicites extérieurs aux manipulations.
Dans le contexte classique, un « etcetera » semble ridicule face au « TOUT » engendrant tous les possibles, face au sentiment de continuité, face aux conclusions de la diagonale de Cantor nous ouvrant la porte sur de nouveaux infinis. C'était l'espoir d'une immensité nouvelle, le non-dénombrable. Mais n'est-ce pas au final un objet-manipulatoire muni d'un sentiment. Un sentiment qui a été formalisé en contrainte manipulatoire. Mais pourquoi pas après tout, et c'est l'intérêt des mathématiques que d'avoir toute liberté de construction et d'interprétation.

Vu sous l'angle de l'accès effectif des objets, les objets transfinis cachent des pratiques beaucoup plus pertinentes que la notion d'infinis, c'est la question de la complexité des définitions, de l'imbrication des « etcetera ». Nous en reparlerons

Pour définir une forme infiniment libre, il suffit de « deux mots » : 'choix' et 'etcetera'. C'est peu de chose. Remplir une forme de TOUT ses contenus possibles, c'est autre chose. La forme n'est qu'un schéma conteneur qu'on peut facilement appliquer, reconnaitre. C'est un schéma qui permet de condenser de façon gigantesque : il condense même ce à quoi on n'a pas accès, puisqu'il condense une idée de TOUS les possibles qui n'est manifestement pas accessible.

Mais en toucher « deux mots » n'est pas TOUT. De plus TOUT est vide. Voila comment « deux mots » deviennent nettement plus que TOUT. C'est curieux, et ça fait rien, parce qu'après TOUT, il reste beaucoup à dire.

L'accès est loin de TOUT

C'est de la notion « d'accès » dont a besoin Cantor dans l'idée de bijection. L'idée intéressante du <contraire de tout> est loin d'être épuisée par la seule diagonale. Dans Cantor version 2, cette idée est relié à l'idée du <contraire de soi-même>, car elle repose sur l'idée atemporelle qu'on doit finir avant d'avoir commencé. Une forte tendance, presque mystique, porte à croire que ces deux concepts sont associés. Mais en dehors d'un tel cadre contradictoire, la notion de « contraire de tout » est déconnectée du « contraire de soi-même ». Et c'est précisément parce qu'on n'a pas accès à Tout. On sait seulement faire <le contraire de Tous les accès déjà bien définis>. C'est plus modeste, mais ça me semble plus conforme à la pratique mathématique elle-même.

Ainsi plutôt que d'imaginer avoir découvert une réalité supérieure à l'énumération (le non dénombrable), je vois dans Cantor l'appel à concentrer notre attention sur les moyens de définitions possibles (toute la complexité imaginable) qui n'empêche pas la possibilité d'ajouter une complexité par dessus. C'est plus réaliste que ce « Tout » vague et illusoire.

Historiquement, c'est bien le raisonnement diagonal de Cantor qui est à l'origine de la confiance dans le non-dénombrable. Faut-il renoncer au non-dénombrable ? N'est-ce pas perdre une immense partie des mathématiques ? Il ne s'agit pas de le perdre, mais de le requalifier. Il suffit de l'appeler liberté, avec l'idée de vide d'information. Dans une vision temporelle de construction pas à pas définissant des objets hybridant structures et libertés, le non-dénombrable apparait seulement comme une belle histoire… qui n'est pas dénué de sens mais qui utilise des grands mots pour dire peu de chose. On ne dit pas grand-chose quand on se contente de dire <TOUT>. Mais il reste cependant un squelette : dans un exposé plus vaste du fondement des mathématiques nous verrions que les infinis ont grand rapport avec de géométrie de la manipulation des définitions, avec le mode d'imbrication des « etcetera » qui est une base de la complexité.

Il me semble que le monde des définitions mathématiques gagne beaucoup à ne pas écraser les objets sous le plan unifiant et creux de <TOUT les éléments de>. La forme est moins informative que le contenu. Il y a un intérêt réel à considérer comment les définitions se stratifient en structures superposées, comment on a accès à chaque contenu construit à force de tissage de concepts. A l'inverse la volonté de mettre à plat tous les objets sur un même niveau atemporelle est un désir de simplification qui gagne en efficacité de manipulation. Mais il perd en réalisme, et il obscurcit souvent le chemin à suivre, le chemin des liens effectifs. Par exemple, derrière l'ensemble des parties de N, se cachent des étages de complexités insoupçonnables par le vocabulaire creux <d'ensemble>. Les mathématiques « temporelles » s'offrent comme un gain de lucidité en distinguant la part univoque de la part interprétative. En distinguant les schémas généraux (la forme) de l'accès (le schéma particulier), des objets-manipulatoires.

Changer de perspective n'est pas aisé, surtout quand on est habitué à raisonner sur un mode qui a fondé le succès et l'efficacité des mathématiques. Face à toutes ces perspectives renouvelées, on entrevoit qu'il faut beaucoup de nuances pour donner du « sens » à une proposition mathématique de ZF. Une affirmation exprime une contrainte

« tout en une fois ». Cette contrainte ne définit pas nécessairement un ensemble dans un univers atemporel, car toute contrainte n'est pas forcément sensée. Sans ajouter qu'on à un problème d'interprétation des contraintes manipulatoires. Dans l'idée générale, une contrainte est une affirmation sur des objets, sa nature est spéculative sans garantie de pertinence. Pour résoudre cette difficulté, il faut redéfinir un cadre qui explique les liens existant entre les affirmations (le langage) et les objets mathématiques. Liens que le cadre classique s'est justement efforcé à faire disparaitre pour éviter toute justification de pertinence. Je souhaite au travers de toute ces remarques poser des doutes, susciter une réflexion sur la posture classique du regard « tout en un ».

Sens illimité

Dans un cadre univoque, une définition donnant un accès complet au tableau de Cantor par un procédé de remplissage sera exprimée au travers d'un ensemble fini de symboles. On peut « voir » chaque symbole de la définition comme le lieu d'un choix libre dans la construction des définitions possibles (De façon plus vague encore, on peut aussi voir chaque concept de construction traduit en langage formel, comme un choix de sens parmi les possibles). Une définition finie peut donner lieu à une construction infinie par un mécanisme de répétition. La question qui nous intéresse alors est suggérée par la construction de Cantor : comment un ensemble fini de choix pourrait-il construire l'ensemble de toutes les suites infinies de choix possibles ?

Cantor nous propose une réponse : c'est impossible. Au dessus de n'importe quel accès complet, on peut toujours construire une suite de choix différente en se basant sur ce qui a été construit. Cantor nous dit qu'on peut toujours choisir une fois de plus. On peut redéfinir au dessus d'une définition. On peut ajouter du sens au dessus d'une construction achevée. La totalité des constructions de sens (les suites de choix), ne peut être enfermée dans un procédé algorithmique fini.

D'un côté, c'est assez naturel ; de l'autre, c'est même rassurant. Et pour finir c'est presque une évidence. L'intérêt de Cantor est de montrer cela avec une clarté et une simplicité mécanique. On pourrait redire cela de plusieurs façons, désignant des contextes différents :

- Il n'y a pas d'algorithme décrivant tous les résultats d'algorithmes.
- Il n'y a pas de procédé « etcetera » qui résume tous les procédés « etcetera ».
- Il n'y a pas un concept qui résume tous les concepts possibles.
- …

Richesse du nouveau monde de Cantor

La diagonale de Cantor nous a culturellement habitué à assimiler le <contraire de TOUT> avec l'inévitable <contraire de Soi-même>. Mais ceci n'est vrai que dans le monde du <TOUT en une fois>. Si la seule façon de construire et de s'appuyer sur une réalité précédemment bien fondée, les deux concepts sont complètement étrangers. Pour argumenter cette affirmation, on peut remarquer que la « diagonale-inverse » n'est

pas le seul procédé de construction d'un « nouveau sens ». C'est probablement un des plus simples procédé sinon le plus simple, mais il est loin d'être le seul. On ne parle que de lui et du vertige qu'il occasionne, mais il existe un monde immense qui s'ouvre par la construction de « sens différent à ce qui est déjà fait ».

Reprenons l'exemple de la version 1 de la diagonale de Cantor. Nous allons voir que chaque bijection de N dans N permet de définir un « nouvel ensemble différents de tous ». La diagonale c'est la bijection identité, mais il y en a d'autres...
Pour satisfaire à la conclusion de Cantor, l'ensemble produit doit être différent de tout ce qui est déjà présent dans le tableau. Il suffit que ce nouvel ensemble soit différent de chaque colonne sur au moins un élément. Pour cela avec une bijection, on choisit un ensemble de case couvrant toutes les lignes et toutes les colonnes et distinctes partout (une bijection). En prenant le nombre fabriqué à partir du contraire de ces cases, on possède un nouvel ensemble. Précisons : posons que la case (colonne 0, ligne 1) contient 1, on notera cela (0,1,1). Selon la même notation posons que le tableau contient (1,0,0), (2,2,0), (3,5,1), (4,3,0), (5,4,1), etc… (les positions sont définies colonne par colonne ici). On constate que nous n'avons bien défini ici des positions qui diffèrent sur toutes les colonnes et sur toutes les lignes (le début d'une bijection de N dans N). Le « nouvel ensemble » sera donné en prenant le contraire des contenus de ces cases dans l'ordre des lignes. Dans l'ordre des lignes, on a 0 issu de (1,0,0), puis 1 issu de (0,1,1), puis 0 de (2,2,0), puis 0 ,1,1,… dont on prend le contraire 101100… Impossible de trouver ce nombre à n'importe la quelle des 5 premières colonnes, étant donné qu'elle y possède partout au moins un contraire (sur une ligne différente à chaque fois).

C'est un peu moins naturel à énoncer que Cantor, mais ça repose sur un procédé identique. Et des bijections de N dans N, il y en a « beaucoup »… : N^N. En raisonnant en termes de quantité, on pourrait dire que la taille des définitions possibles est « plus grande» que la taille de nombre possible qui n'est que de 2^N. Sur un exemple de taille finie, donnons un ordre d'idée. En prenant un tableau 8x8 : on a 2^8=256 possibilités pour remplir une colonne (suites de 8 nombres 0 ou 1 qui se suivent), alors que le procédé précédent définit 8!=40320 suites incompatibles à partir d'un tableau achevé. Ne pouvant pas faire plus que 256 suites de 8 nombres, ses définitions aboutissent inévitablement à des recoupements. On découvre au passage que le « mode de définition du nouveau » est un monde de la liberté à lui tout seul qui va bien au-delà des objets construit. Il y a là un levier du rapport intéressant qui existe entre définition et objets. On entrevoit l'idée de multiplicité de définitions d'un même objet qui ne sont pas forcément facile à identifier. En effet, la définition est établie sur des formes et la dépendance s'établie sur des contenus. Quand on passe ce raisonnement sur la définition d'objets infinis, établir les reconnaissances d'objets derrière les modes de définition est d'une complexité non limité. C'est toute la complexité des mathématiques imbriquées en strates parfois indévissables qui se dresse ici. On y découvre alors que la notion de concept de construction est parfois plus signifiante que la notion de contenu résultant dont on peut n'avoir aucun moyen de comparaisons. Tout cela pour dire que l'idée de « nouveau » est encore plus complexe que la seule « vraie » nouveauté, à cause de la multiplicité des modes de définitions possible, à cause l'inaccessible finalité.

Pour revenir à l'idée de départ, ce n'est pas un unique nouveau nombre diagonal, un unique point aveugle, que nous offre Cantor, mais Tout un monde nouveau et immense : la construction de sens au dessus du sens.

A cela, on pourrait ajouter que l'idée de « contraire » est propre à la base 2 utilisée : il n'y a que deux alternative à chaque choix 0 ou 1, avec une alternative en base 10 où l'on construit des suites de chiffres, la bonne notion n'est plus « contraire de » mais « différent de ». D'où une démystification de l'idée de négation, qui montre une certaine indépendance de la construction vis-à-vis du concept de vérité.
On peut aussi ajouter que la méthode des bijections proposées ici n'est utile que pour faire face à toutes les éventualités de contenus. Si l'on avait connaissance de certaines valeurs qui se répètent dans le tableau, si l'on connaissait des structures dans les valeurs du tableau, on pourrait optimiser et construire un « contraire » avec moins d'information qu'une bijection. Le monde de la nouveauté est vaste…

Cantor paradoxal ou constructif

Beaucoup de raisonnements en mathématiques utilisent le procédé diagonal de Cantor, je les classe en deux catégories :

- Les « tout-en-un » qui construisent un objet contradictoire de par sa définition. Cette contradiction ouvre la porte sur un nouveau monde mystérieux : des objets non-dénombrables, les transfinis (interprétés comme infinis de plus en plus grands), le théorème d'arrêt, le théorème d'incomplétude de Gödel, … Je ne nie pas la validité de ces constructions, car il n'y a de validité qu'au travers d'une interprétation. Je les décris comme générant des interprétations non réalistes, passablement illusoires, fondées sur des formes, déconnectées de la structure à étudier. Ce sont des concepts au dessus d'un tout dont on a rien dit. Il s'agit d'éléments interprétatifs rapportés, et pas fondés sur une analyse de la structure interne de base. Ces résultats extérieurs sont donc interprétativement exploitables, manipulables, mais peu pertinents car dissociés des structures en jeux.
- Les constructions ordonnées de sens qui n'ont aucune contradiction, et produisent effectivement un nouveau monde, en construisant des liens au dessus des structures précédentes. De ce nombre sont la non-suffisance des fonctions primitives récursives, la non-définissabilité des ensembles d'entiers (Cantor), la complexité algorithmique obtenue en construisant la diagonale de cantor au dessus d'un algorithme qui complèterait le tableau, la complexité logique avec l'alternance des quantificateurs (qui est une imbrication de etcetera), la construction de « grands » nombres par construction algorithmique imbriquée, …

Renoncement à l'univocité ?

Après avoir pris tant de distance par rapport à l'approche classique, il convient de la réhabiliter. Je la perçois comme un cadre qui au lieu de maximiser la structure sémantique sous jacente au mathématiques s'est adaptée pour maximiser l'efficacité manipulatoire de la pratique mathématique. Son nivellement en <Tout existant au

préalable> produit une disposition d'esprit qui cache les mécanismes profonds de la définition des objets, mais produit un accès facile à leur manipulation.

L'approche à « sémantique ordonnée » fera naturellement penser à un constructivisme enraciné (Cela tombe bien, la démonstration de Gödel est constructive et pourra donc être analysée avec cette perspective). Et pourtant, il me semble qu'il existe une bonne distance entre l'approche à sémantique ordonnée et l'approche constructive.

En effet, les mathématiques ne consistent pas à rendre accessibles tous les objets dont on dit qu'ils existent. Non il s'agit plutôt de connaitre les liens et les couches d'interprétation qui unissent une existence à son socle de génération. Savoir qu'on a plus que de 10 euros en poche est une information qui peut se suffire à elle-même (nous garantissant la possibilité d'un achat. Ou même sans conséquence finaliste). Ne pas connaître la somme exacte n'est pas une vacuité. L'absence de lien d'accès n'est pas une gêne. Une information incomplète reste une information. C'est juste un schéma …particulier. Il importe d'en être conscient. Les liens de dépendance et d'indépendance sont intuitivement peu perçu quand on utilise des théorèmes <tout en un>. Par exemple l'usage de l'axiome du choix construit une réalité coupée de la constructivité, en plaçant comme un fait a priori certaines existences que l'on n'a plus à déraciner dans la structure. Si l'on croit à l'existence d'infinis mystérieux, c'est un peu plus gênant, parce qu'on se demande bien comment on pourrait dénicher de tels objets sans cet outils mystérieux d'affirmation d'existence. Mais si l'on considère que ces mystères ne sont que des structures-manipulatoires, l'affirmation d'existence nous laisse l'idée qu'on manipule de structures non connexes. Des objets à cheval sur deux réalités : les objets extérieure et leur manipulation. Ainsi peuvent se dissiper les « craintes » face à l'usage de l'axiome du choix : quand il s'agit d'un objet accessible à la constructivité, l'axiome est l'outil du fainéant, du pressé, du détaché ou du dépassé (l'axiome trouve pour moi), et quand il s'agit de la réalité manipulatoire, choisir à l'intérieur n'a qu'un sens interprétatif. Et il n'existe pas toujours une interprétation extérieure à un tel choix. Chaque usage de ces théorèmes sur des objets mathématiques constructifs sera traductibles en recherche constructive à réaliser. Et quand cela ne l'est pas, c'est parce qu'il ne s'agit pas d'une réalité extérieure.

De façon générale, se munir d'une information complète n'est pas un devoir (même si c'est un défi intéressant et de nature très mathématique, il s'agit d'une recherche d'univocité). Je vais même plus loin : c'est dans l'essence des mathématiques (et de la vie) que de concentrer les informations (et donc de laisser dans l'ignorance ce qui serait pourtant possible d'acquérir). Et même plus loin encore: on ne peut pas du tout se passer de cette « désignation unique d'existences multiples » sous peine de ne rien dire, de ne rien observer, c'est la perte dans la singularité qui détruit les perceptions, les reconnaissances dont l'esprit humain a besoin. Le choix de l'atemporalité est donc un bon choix de contraction. Mais c'est aussi un choix qui possède ses limites comme toute mise à distance de l'univocité. Dans la contraction d'information, il s'agit de dire un maximum « en une fois ».
Un deuxième aspect de la contraction classique réside dans la manipulation « des contraintes » au lieu de celles des objets. Il s'agit là d'une pratique plus délicate, car pouvant manipuler des affirmations en décalage avec les objets dont on parle. C'est

donc plutôt les pratiques curieuses réalisées dans le monde des contraintes qui posent des problèmes, plus que le fait de manipuler des contraintes. Les contraintes sont adaptées à notre utilisation des pratiques mathématique dans le monde et la démarche de fiabilité ; même si toute contraction génère une perte d'univocité. Ce n'est pas anodins que les mathématiques « atemporelle » et les mathématiques de « la contrainte » soient nées de la recherche des fondements et de fiabilité, c'est parce que ce choix de perspective légitime est rudement efficace vis-à-vis des attentes humaines. A l'inverse, cette perspective possède ses limites et rend obscure la nature des mathématiques qui réside dans les structures, les formes, les observations, les spéculations, les définitions, les empilements d'interprétations, …

L'interprétation maximale

L'atemporalité est fortement liée à une autre difficulté des mathématiques, celui de l'écrasement interprétatif. Si les théories formelles nous ont détournés des objets à la faveur des contraintes, la pratique mathématique traditionnelle pratiquée communément nous a habitués à voir les objets derrière leur définition. Il s'agit d'un mécanisme d'interprétation symbolique naturel : on écrit une chose pour en désigner une autre. C'est le principe même du langage. Ce mécanisme a développé en nous l'automatisme de l'interprétation maximale. Cela a pour conséquence d'écraser les strates de constructions sémantiques qui définissent les objets. Cet écrasement produit une grande efficacité dans la simplicité manipulatoire qu'elle génère, mais de l'autre côté, cela engendre la perte du sens manipulé.
Tout cela est bien résumé par la difficulté qui réside dans le signe '='. Quand on écrit 5+3=8, on dira qu'à gauche et à droite, on a le <même> objet. Manifestement, cela nécessite une certaine schizophrénie pour y parvenir. Chacun des nombres 5,8,3 est un objet mathématiques, l'addition en est aussi un. Ce n'est que modulo une « interprétation » qu'on a l'égalité. Cette interprétation consiste à voir le résultat du calcul au lieu de voir le calcul lui même. Quand les expressions sont plus complexes, l'égalité entre objets n'a de sens que modulo d'innombrables interprétations (calculs, fonctions, de permutations, transformations, associations,…). Et l'on trouve ici la pratique courante des mathématiques : tout interpréter au maximum, tout projeter sur un espace de référence. Pour les calculs numérique, on interprétera jusqu'à trouver un nombre. L'égalité entre deux expressions est donc une égalité modulo interprétations (interprétations conservant l'égalité). C'est une sorte de classe d'équivalence de l'interprétation. Il me semble utile de la dévisser. Non pas pour l'intérêt de compliquer la pratique des mathématiques, mais parce que le processus de définition des objets repose sur ces interprétations imbriquées. Une mauvaise perception peut produire des illusions ou même des contre-sens pour ne pas dire des erreurs. Nous verrons dans la partie arithmétique du théorème de Gödel que l'interprétation automatique pose de sérieux problème. Face à des schémas finis, face à des calculs, le problème semble assez simple. On « ressent » une projection naturelle dans un monde complètement structuré de façon univoque. Mais face à des objets qui parle d'infini (qui contiennent des « etcetera » dans leur définition), qui parle d'interprétation de définition, en particulier dans le monde des contraintes « tout en une fois », ou même dans le monde des algorithmes (construction ordonnée) générateur d'objets potentiellement infinis, dans toutes ces situations l'interprétation des définitions n'a parfois rien d'évident. On peut donner l'exemple de l'analyse mathématique qui projette les nombres sur un concept abstrait de « proximité » par les suites de Cauchy ou les coupures de Dédekind (pour les réels). Il ne s'agit que d'une forme, et d'une forme qui troque la complexité des définitions des nombres pour une réalité abstraite et réductrice de sens, la proximité. Il y a la une grande difficulté conceptuelle de projection. Et cela montre l'importance du procédé de définition vis-à-vis de la notion de projection. Sous ces perspectives, que dire d'un nombre comme Omega de Chaitin ?

Comprendre que l'interprétation est une étape à part entière de la construction et que la projection maximale n'est qu'une pratique utile à la manipulation est une perspective assez décalée de la pratique classique. Par habitude, on raisonne en classe d'objet, en « nombre réel », en fonction uniformément convergente, ... dans lesquels on projette. On raisonne sur des forme libres qui ne sont pas forcément simple. Mais la forme ne donne pas le contenu. Il ne suffit pas d'une forme pour être à l'abris des problèmes d'auto-contradiction, du manque d'univocité. Avoir la forme, n'est pas une garantie de bonne santé. On raisonne ordinairement sur des objets que l'on imagine forcément bien définis à partir du moment où ils ont la forme et la non-contradiction. Ils sont membre de l'ensemble, de la fraternité. Et tous sont rangés au même niveau. Mais la réalité c'est que pour construire un objet, on utilise une définition, un algorithme, des contraintes et il est possible que cette définition définissent elle-même un autre algorithme et ainsi de suite, les procédés peuvent être immensément complexe sans parler de problème de jonction entre les mondes de l'observation et des objets. Observer les objets interprété de façon finale comme seul intérêt d'une définition, c'est écraser la nature de ces objets, et cela d'autant plus que la projection se fait dans un monde non univoque (comme l'analyse). Suffit-il vraiment qu'un objet ait la forme pour qu'on puisse « s'imaginer » qu'il possède un projeté, pour qu'il ait une existence. Dans une version plus réaliste, on se doit de connaitre les liens construit, mais aussi les manques de lien. On a une forte tendance compléter mentalement les manques de lien, parce qu'on imagine toujours les objets projetés.

La complexité des mathématiques se trouvent dans l'accumulation des interprétations successives, projeter c'est perdre de vue cette essence. Dans l'accumulation des définitions, on trouve par exemple comment le procédé diagonale de Cantor permet de définir une nouvelle suite au dessus d'une autre liste de suite. Voir les définitions, les liens crées nous ouvre sur un aspect essentiel du monde mathématique : la non-linéarité qui interprète ses propres résultats. Par exemple, on a l'habitude de voir 'racine de deux' comme un nombre, mais la source de son existence n'est-elle pas plutôt un algorithme. Dit un peu brutalement : l'idée de « nombre réel » n'est-il pas une sorte d'illusion sémantique née de la pratique projective sur les entiers. Dit avec plus de délicatesse : n'est-il pas pertinent de considérer la nature définitionnelle des nombres réel plutôt que leur position sur une droite qui n'est qu'une partie immensément tronquée de leur réalité. Une machine de Turing « universelle » construisant ses propres programmes de façon répétée, ou un ordinateur modifiant les mémoires dont celles qui code son programme montre l'importance de chaque niveau de définition. Il existe tout un monde où la construction mathématique ne peut pas dépasser le mode <étape par étape> parce que la complexité est telle que rien n'est visible au-delà de que ce qu'on peut calculer, seule le parcours effectivement établit révèle le sens pas à pas. Cela conduit assez naturellement à une approche dynamique des mathématiques (la logique linéaire).

La projection fait bon ménage avec le « tout-en-un » dans le but d'une réduction maximale des réalités. C'est l'antithèse de la différentiation des objets, du pas à pas dynamique. Tout cela procède de deux attentes différentes : d'un côté le réalisme qui se doit de détailler tout ce qui possède une influence, de l'autre l'efficacité qui se doit de condenser tout ce qui n'est pas primordial à son usage.

Par exemple, la théorie des ensembles est un fondement des objets mathématiques quand on projette tous les objets sur un type unique : sur des schémas fondés par la notion d'appartenance (dans la théorie naïve), ou sur des phrases symboliques via un modèle (dans la théorie renouvelée).

La recherche d'une compréhension approfondie des mécanismes conduit à une attitude contraire à la projection. C'est utile de la qualifier pour en percevoir la nature : c'est l'attitude qui consiste à séparer tout ce qui est différent. C'est ainsi que se forme le relief de l'interprétation. C'est ainsi que la notion de définition prend une place prépondérante. C'est ainsi que l'étude de la complexité due aux alternances des quantificateurs prend un sens constructif. Dans un cadre algorithmique, la notion de récursivité, ou la notion d'algorithme générant des algorithmes devient primordiale. Et ce n'est pas là qu'une pertinence théorique : l'invention des ordinateurs nous a conduit presque malgré nous à comprendre l'intérêt de considérer les objets manipulés par les programmes comme de la même nature que les programmes, comme pouvant être eux-mêmes des programmes, comme « devant » être des programmes pour optimiser les manipulations sémantiques [L'histoire des sciences – Michel Serres – dernier chapitre]. Il y a beaucoup à découvrir dans ce dévissage de la projection.

La projection mal définie, c'est la source des confusions. Par aveuglement, par interprétation hâtive, on projette en un seul endroit ce que le bon sens demanderait à distinguer. Egaliser des objets distincts conduit à écraser le monde. Quand on s'attaque à étudier le langage qui permet d'exprimer toutes les mathématiques (quand on étudie un système formel), la rigueur est de mise, d'où l'utilité de cette perspective cherchant à affiner la perception vers un plus grand réalisme des structures en jeux.
J'avance l'hypothèse que le théorème d'incomplétude de Gödel repose sur une telle identification audacieuse de projections distinctes. C'est l'objet de cette étude.

La vérité embarquée

Je vais présenter ici l'idée audacieuse que la vérité n'est pas une notion mathématique ou plutôt que les mathématiques n'ont pas besoin de l'idée de vérité. C'est audacieux quand on pense à la logique, la science de la vérité, qui est le fondement des mathématiques. La logique et les mathématiques seront présentées ultérieurement comme la conséquence, la formalisation, la manipulation d'un autre fondement, à savoir l'univocité qui n'est pas en rapport direct avec la vérité. J'espère pouvoir montrer que c'est encore une fois pour être efficace que les mathématiques ont choisi de se constituer en un système formel qui intègre une notion de vérité alors qu'elles auraient pu en être distantes. L'explication qui suit est un peu longue, mais étudiant le théorème de Gödel, il semblait difficile de se détourner de la question de la vérité qui est au cœur des structures en jeux. Et la perspective qui résulte de cette approche possède son importance dans ma lecture du théorème de Gödel.

Après Aristote, la vérité à été formalisée par Boole, puis intégrée dans le langage formel de Frege au travers de la négation qui entretient des relations mécaniques avec les autres symboles. Je pense que d'avoir formalisé la vérité à l'intérieur du fondement des mathématiques pose des problèmes délicats. Pour expliquer clairement ce que j'entends par là, il est nécessaire de prendre du recul.

A l'origine, c'est un regard et une recherche philosophique qui m'ont conduit à imaginer une nouvelle perspective sur les mathématiques qui m'a conduit à envisager les mathématiques comme indépendantes de la notion de vérité. En général, les mathématiques sont plutôt perçues comme le modèle, et parfois même le garant de la vérité. Dans une perspective classique, la recherche de vérité est la source de conduite des mathématiques. Mon approche est tellement contraire à ces pratiques classiques qu'il me semble nécessaire de présenter avec largeur les racines qui ont formé en moi l'appui de cette tentative. Les pensées timides, errantes au départ ont pris toujours plus d'ampleur et une direction toujours plus précise. Tout ce travail de mise en perspective est la conséquence d'un premier travail d'une nature très éloignée des mathématiques : la compréhension du sens perceptif dans une théorie de la pensée.

Modèle de la pensée

Je vais présenter rapidement la démarche qui mène de cette théorie de la pensée aux éléments de fondation des mathématiques.

Théorie de la pensée

Par des recherches en philosophie, en psychologie et en intelligence artificielle très éloignées des mathématiques, je suis venu à concevoir un modèle théorique du fonctionnement de la pensée et en particulier de la perception. On trouvera un résumé de cette théorie en annexe. Ce modèle m'a conduit à estimer que :

- Notre pensée pourrait être formalisée par le concept fondamental d'organisation en schémas (des liens entre des nœuds, vides de toute sémantique : on retrouvera ainsi le même choix de fondement en mathématiques)
- Le sens ressenti à chaque instant par notre esprit correspondrait à l'activation d'une unique cellule neuronale. Parmi tous les branchements synaptiques possibles, seules certains seraient activés. Cette cellule serait donc reliée uniquement à quelques cellules (parmi tous les possibles). Et le « sens ressenti » par l'activation de cette cellule serait une sorte de « somme des sens » des cellules sur lesquelles elle est branchée. Ainsi le sens serait construit par association d'idées sur d'autre sens. Et chaque cellule de proche en proche procède de la même organisation, jusqu'à aboutir aux cellules sensitives qui elles sont stimulées par l'environnement extérieur. Ainsi le « sens ressenti » d'une cellule est objectivement donné par la forme pyramidale dont la cellule activée est le sommet au dessus des cellules sensorielles basales.
- C'est notre expérimentation du monde qui est l'origine de l'organisation sémantique de nos sensations. Un principe de reconnaissance sémantique va guider la construction mécanique des liaisons synaptiques. C'est donc parce que le monde est organisé qu'il se produit une organisation de nos concepts mentaux. Le monde, stable, produit la convergence des concepts des différents individus. La construction du sens se fait par accumulation de reconnaissance qui à chaque nouvelle perception relie un pas plus loin, ce qui a déjà été acquis. Cette construction sémantique en réseau de sens se déroule automatiquement par des procédés chimico-physiques.
- Le mécanisme de base au niveau neuronal serait neutre de presque toute sémantique. Mais notre cerveau serait séparé en module plus ou moins, neutres de contenus mais pas de fonctionnement (ce qui induit une sorte de contenu). L'organisation interne de ces modules aurait une influence sur l'acquissions des concepts, sur le fonctionnement de l'autonomie. On peut dire que l'organisation globale du cerveau et des cellules sensorielles avant même toute acquisition imposent une « teinte psychologique » particulière.
- La perception serait un mécanisme automatique : les cellules sensitive stimulés dans un contexte d'activité cérébrale, produirait un flux convergeant reposant sur la proximité de sens (reconnaissance des mêmes liens) et sur l'influence des contextes. Ce flux serait finalisé par la création d'une cellule de perception qui rassemblerait les cellules les plus stimulé (i.e. les plus « fortes » reconnaissances) . Ainsi serait reconnu, créé et accumulé le sens perçu. Celui-ci serait organisé par un processus de synthèse automatique qui produirait l'abstraction naturelle.
- Tout cela produirait une sorte de traduction du monde (de nos perceptions accumulées) par une organisation pyramidale de cellule chargé sémantiquement par les liens tissés.

Il ne s'agit la que de la partie perceptive, il y aurait beaucoup à dire, sur l'action et l'autonomie, l'émotion…

Théorie de la réalité

En parallèle avec la théorie de la pensée, s'est construite en moi une théorie de la réalité, fortement influencée par la théorie de la pensée. Il s'agit d'une morphologie

générale de la « réalité extérieure » à soi. Des concepts communs unissant la perception du monde se sont dessinés en moi (on trouvera un résumé de cette théorie de la réalité en annexe) :

- la réalité extérieure que nous percevons est une réalité multiple, superposée, et mouvante. Toute identité y est mal arrêtée, du moins en théorie.
- L'idée de voir la réalité comme un unique schéma de lien imbriqué en est une approche analogique fructueuse ; je la détaille dans un concept que je nomme la « trame ».
- L'identité des objets ou des concepts extérieurs provient d'une concentration de schémas manifestant une certaine cohérence que je nomme condensation.
- Les identités ne sont pas côte à côte à l'instar des objets matériels, mais elles peuvent être superposées au dessus de mêmes schémas. Les schémas s'unissent et s'imbriquent en de multiples réalités superposées.
- Le monde est rempli de schémas similaires (reconnaissables) qui se répètent et se lient de façon similaires. Cette observation fonde la stabilité du monde. Cette pérennité de l'organisation des schémas est la source de la connaissance du monde. En bien des lieux du monde, cette pérennité a au moins autant de sens que le mot « certitude ».
- Le sentiment d'évidence que nous avons du monde matériel comme étant plus réel que les autres descriptions du monde n'est qu'un sentiment issu de la particularité de notre porte d'entrée sur le monde : nos cinq sens, nos cellules sensitives. Le cerveau par le mécanisme précédemment décrit produit des reconnaissances immédiates des concepts issus de notre sensitivité : ce sont ces concept lié à la sensitivité directe qu'on nomme la matérialité. La vision joue un rôle prépondérant.
- Mais la réalité du monde dépasse de loin la matérialité, elle contient beaucoup d'abstraction formant des réalités au même titre que la matérialité. Il en est ainsi de beaucoup de connaissances sur le monde. Elles sont juste plus éloignées de notre perception directe. Elles se forment en nous par des mécanismes mentaux, soit automatiques, soit par un apprentissage, soit par une recherche organisée des réalités du monde. C'est dans cette perspective que les mathématiques m'apparaissaient aussi « réelles » que la matière.
- Le concept élémentaire de la réalité m'est apparu assez spontanément sous la forme du lien. Je n'ai compris que dans un second temps sa cohérence avec la pensée : si notre mode d'accès au monde n'est que « liens », il était normal que le monde apparaisse aussi sous ce concept de liens. A la différence près que l'archétype de la réalité perceptive repose sur le schéma pyramidal, alors que l'archétype d'une réalité extérieure repose sur un schéma autonome (la condensation). Cette différence provient du fait que le monde s'autonomise par rapport de nos perceptions sensitives en s'organisant par rapport à lui seul. C'est en cela qu'il s'agit d'une (re)-connaissance extérieur. Ces schémas autonomes sont la projection plane de schémas pyramidaux de ressenti fondés au dessus de concept assez abstrait pour paraitre indépendant de nous.

Approche des mathématiques

Le guide de ma réflexion était la forme du réel, la forme du fiable, la nature profonde des choses. Et à ce propos les mathématiques posent question. Elles sont en rupture avec la forme général du réel : comment se peut-il que le monde fut aussi flou, multiforme et que les mathématiques fussent aussi inflexibles, rigoureuses. Et si au lieu d'être un aspect cette rigueur était justement leur nature profonde. L'idée d'univocité comme cœur du mécanisme mathématique m'est alors apparu.
L'idée de liens tellement présente dans mes recherches s'est assez rapidement proposé comme possibilité de fondement, sans pourtant y trouver rapidement sa place. Les mathématiques semblaient faire appel à un cadre beaucoup trop riche en concept flou pour que le lien fasse un candidat assez solide de fondement profond. Le lien semblait abondamment présent dans beaucoup de nos pratiques mathématiques. Je cherchais sa place, et son observation a construit quelque chose d'étonnamment simple que j'estime maintenant être une césure fondamentale : les liens face au reste. En fait, pour donner sa place au concept de lien, il fallait que le « reste » trouve une cohérence. Elle a doucement pris la tournure d'un concept unique : l'interprétation. C'est ce que je me propose d'exposer brièvement ici.

Une autre idée qui m'a servi de fil conducteur et qui est à l'origine de mon concept d'interprétation est la suivante : en mathématique, on réussi en peu de mot à parler de beaucoup de chose à la fois. Par exemple parler de l'infini avec un nombre de mots et de concepts fini avec toute la rigueur des mathématiques. L'idée qu'il était possible de comprendre cette « capacité » et de la situer dans ma théorie de la pensée et du monde réel n'a cessé de faire rebondir mon désir à en découvrir le sens. Il me fallait chercher dans le langage les éléments de nature univoque qui permettait de parler de beaucoup de chose à la fois en peu de mot. Il me fallait trancher en mettant de côté le mystère pour m'attacher au compréhensible. Dans cette direction, une surprise mathématique de taille était la possibilité de parler de plusieurs sortes d'infinis avec un aplomb et une réalité qui me laissait pantois. Tout cela était possible par le raisonnement fini de la diagonale de Cantor, raisonnement que l'on retrouvait presque partout dans les « mathématiques conceptuellement surprenante ». Que d'heures et d'hypothèses passées sur ce théorème. Rempli de doute sur les interprétations officielles, les questions les plus évidentes me posaient aussi problème : comment pouvait-on parler d'infini, même potentiellement, en un raisonnement fini.

Ma réflexion philosophique plaçait la réalité mathématique au même rang que la réalité matérielle, au rang d'une apparence d'identité, mais d'une apparence aussi solide que tout le reste du réel. Une condensation forte. Mon modèle de réalité : les identités, les objets du réels ne sont que lectures particulières qui se chevauchent et s'entremêlent, elles sont directes et évidentes quand leur unité est donné par les sens, elles sont abstraites et synthétiques quand leur unité naît d'un long apprentissage basé sur la reconnaissance et la synthèse. C'est ainsi que m'apparaissait les mathématiques, comme une abstraction issue lentement du monde car assez éloigné du regard sensitif initial. L'accès à la pratique mathématique avait été une histoire lente et difficile, mais son efficacité sur le monde, son indomptable résistance à nos désirs témoignait de sa

pure réalité extérieure à nous. Elles devaient puiser leur origine dans le monde, avant que nous ne nous les appropriions.

Les mathématiques en trois temps

Bien avant d'avoir fondé les mathématiques sur l'idée de liens et de schémas, la première étape a été de trouver la place des mathématiques entre le monde extérieur et nos pratiques culturelles. Une première perception des mathématiques en trois étapes a été le support de toute ma compréhension ultérieure. Ces trois étapes sont l'univocité, l'observation, la spéculation.

1- L'univocité

Si les mathématiques sont bien dans le monde comme un objet réel au même titre que les objets matériels, si la difficulté de leur perception n'était due qu'à l'éloignement qu'elles ont de nos capacités sensitives, si leur mode d'existence est le même que celui d'une montagne (qui est une idée abstraite en rapport à la réalité atomiques ou en rapport à la réalité visuelle issue de nos capteurs sensitifs) ou d'une idée abstraite comme le vent ; autrement dit si la nature première des mathématiques est d'être une réalité hors de nous, la première question devenait : quel est la part de naturel et la part d'humain dans les mathématiques.
Un constat assez clair pour commencer : les mathématiques sont en rupture avec le reste de la réalité en ce qu'elles semblent parler « parfaitement vrai ». Comment se peut-il qu'on manipule très humainement des mathématiques et qu'elles nous offrent les moyens de ne pas se tromper ? Ni dans la pratique algorithmique, ni dans sa redoutable efficacité d'application au monde réel (la technologie).
La découverte des mathématiques formelles, comme pure moyen mécanique de manipulation de toutes mathématiques posait un cadre pouvant servir de fondation à tout l'édifice mathématique. C'était pour moi une découverte impressionnante, car un fondement doit parler de la nature profonde des mathématiques, en particulier de la nature « extérieure » des mathématiques. C'est l'aspect intimement mécanique qui y est saisissant. Dans les mathématiques formelles, les manipulations peuvent se passer de notre intellection, elles correspondent juste à un respect de quelque règles univoque.
Face à la largeur des pratiques mathématiques connus à mon niveau, et inspiré par l'idée de mécanique formelle, cette nature profonde des mathématiques pour elles-mêmes (en dehors de notre mode d'accès à elles), a pris en moi le nom d'univocité : les mathématique sont l'implacable, elles ne produisent pas d'erreur car leur nature est d'être une simple mécanique, non pas au sens physique de mouvement, mais au sens de structure implacable de manipulation. C'est une mobilité sans aucun jeu, sans aucune souplesse, sans élasticité, sans aucun dévoiement, sans aucune ambigüité manipulatoire.

Le concept d'univocité devait alors se positionner sur la question de la vérité. La réponse est apparue dans une analogie avec la réalité matérielle : le fait qu'il n'y ait pas d'erreur en mathématique s'est rapproché de l'idée qu'il n'y a pas non plus d'erreur dans la réalité qui nous entoure : on ne parle pas jamais de l'erreur dans une pierre, une planète ou dans le vent. L'erreur est un décalage par rapport à une attente, à une

intellection. Voilà qui éclairait grandement la nature extérieure de la réalité mathématique. Elle n'avait rien avoir avec le vrai ou le faux, mais tout simplement avec le réel. D'où l'enracinement du concept d'univocité comme constitutif de la nature mathématiques. Les mathématiques ne parle pas vrai, elles sont. Comme le reste du monde. Le réel est là et montre sa nature, sans parler d'erreur ou de vérité. La nature particulière des mathématiques à la différence du reste du monde était simplement d'être implacable, sans dévoiement, inélastique, en un mot univoque. En conclusion l'univocité n'était pas un constat sur les mathématiques, mais la nature même de son existence dans le monde. Les mathématiques devenaient à mes yeux la réalité univoque de monde.
A ce stade les objets mathématiques étaient des réalités extérieures à moi comme les pierres et les voitures, seul ce que j'en disais était susceptible de discussion, d'erreur ou de subjectivité.
Bien évidemment, leur réalité dans la nature n'était pas directement matérielle accessible aux cellules sensitives, mais incarnée : la réalité matérielle (mes sens) trahissait leur nature comme elle trahit par ailleurs l'existence du vent, l'existence de trajectoires ou le concept de longueur qui sont tous des « réalités ». Et comme toutes les autres réalités, elles étaient liées à une complexité indescriptible, à une ambigüité, une difficulté de perception dont seule l'abstraction pouvait écarter la gangue. Par le principe de condensation (la reconnaissance propre d'une identité comme apparence, pouvant être superposée à d'autres) la nature nous fait « voir » des réalités mathématiques univoques, des objets inflexibles, des mécanismes sans jeu. Tous ces « objets » mathématique témoignent d'une nature inflexible, signe de leur reconnaissance.
Il fallait alors combler la distance qui existe entre cette perception réaliste et extérieur des mathématiques et la pratique quotidienne des mathématiques. Car nos pratiques mathématiques (la plupart du temps symbolique) semblent immensément distantes du monde des objets matériels.

2- L'observation

Si la première étape consiste à prendre conscience de ce que sont les « mathématiques » hors de nous, la seconde nous parle de notre mode de relation avec elles : dans un premier temps, c'est l'observation.
En effet, selon mon approche philosophique de la réalité, les mathématiques apparaissent dans la nature en tant qu'individualité isolé (ce que j'appelle des condensations). Elles nous apparaissent elles par abstraction dans un mécanisme physique, dans un fonctionnement systémique, à l'intérieur d'une figure spatiale, etc. Cette capacité des mathématiques à apparaître en individualité identifiable comme se détachant des objets où elles se montrent, en nature, en forme, nous permet d'abstraire les objets mathématiques par reconnaissance de similarité en divers lieu, jusqu'à un détachement complet de leur incarnation. Il se produit alors une identification précise de l'objet mathématique lui-même. C'est le principe d'abstraction (qu'on pourrait appeler aussi un principe de synthèse des similaires). Aidés de concepts mathématiques historiquement accumulés, notre perception ne cesse de s'accroître et de se préciser; elle se forme de proche en proche par accumulation, synthèse et reconnaissance comme toute autre acquisition perceptive. En mathématique, le fonctionnement est

identique à toute autre connaissance, à ceci près que la nature univoque des mathématiques n'est pas « facilement » perceptible par les sens et demande davantage d'apprentissage de reconnaissance, de synthèse et d'identification (il semble d'ailleurs que certains possède plus d'aisance que d'autre à la percevoir).
Comme toute autre perception, notre accès aux mathématiques repose donc sur la reconnaissance (on pourra voir la théorie de la pensée proposé en annexe pour en comprendre l'aspect essentiel). L'observation des structures mathématiques (une structure est un schéma fait de schéma intérieur) laisse apparaître des « schémas » conceptuels qui se répètent et qui ainsi sont reconnaissables. Ces schémas se lient de façons variées et répétées. L'acquisition des mathématiques commence ainsi par la perception informelle des structures mathématiques. Cela pourra laisser place à l'analyse une fois que les schémas sont bien identifiés. Comme dans toutes constructions supérieures de la perception, on choisit des mots pour désigner chaque concept reconnu, et d'autre pour décrire l'organisation de ces concepts entre eux. On constate par la pratique que l'univocité (l'idée de rigidité, d'inélasticité,...) est au cœur des liaisons qui unissent ces concepts perçus.
Comme toute réalité à nouveau, l'existence des mathématiques hors de nous sont une existence inaccessible en totalité car riche et incarnée dans le monde et dans l'histoire de façon inextricable. Seul nous apparaissent des figures, de structures, des objets mathématiques (des condensations). Le rôle de l'observation du monde est d'approfondir notre connaissance de ces objets reconnus, de ces structures. Ce sont au départ des observations parcellaires, des structures indépendantes qui historiquement se sont constituée en organes toujours plus unis et structurés les uns par rapport aux autres, c'est le monde mathématique. Une certaine unité générale dans leur existence s'est constituée à la fin du XIXème siècle, permettant d'édifier un cadre de manipulation à peu près unique pour l'ensemble des mathématiques (Frege puis Cantor).
Ainsi l'idée que les mathématiques se révèlent au travers de structures dans la nature, l'idée que l'observation permet de connaître les structures dans leur invariance, leur réalité profonde, dans leur mécanisme invisible au départ, dans la multiplicité des réalités étagées et imbriquées de ces structures ; cette idée a fait place à une réalité plus unis, une nature profonde ayant une sorte de schéma commun.
Concentré sur les objets, sur la réalité extérieure des mathématique, on pourrait avoir le sentiment que les mathématiques sont tout simplement une accumulation d'objets. Les mathématiques seraient les objets univoques révélés par le monde. Objets que l'on peut étudier et approfondir pour en saisir plus précisément les spécificités, les possibilités et les connaissances qu'ils nous apportent sur le monde.
Caricaturalement, c'est à peu près là qu'on se situait au début du XXe siècle, mais les mathématiques ont révélé une certaine autonomie vis à vis de l'observation du monde. La possibilité de créer de toutes pièces des mathématiques qui ne sont pas reconnaissance du monde, mais construction libre. Et cela est devenu d'autant plus crédible que presque par hasard certaines de ces mathématiques se sont révélées après coups être dans le monde (on citera bien sûr les « géométries » inventées à la fin du XIXème siècle)
Est apparu l'idée que la connaissance du socle commun des mathématiques nous ouvrait la porte d'une liberté inconnue : celle de construire de nouveaux objets qui n'était

pas apparu nativement dans la nature. Objet que l'on peut étudier et « observer » au même titre que ceux de la nature.
On assiste là, à un écartèlement de notre regard sur les mathématiques. On peut avoir deux positions très différentes :

- les mathématiques sont constitutivement un regard « très humain » sur la nature, la preuve en est justement que l'homme peut manipuler les mathématiques à sa guise sans rapport avec la nature et donc qu'il s'agit la d'un « matériaux » de son esprit.
- Ou à l'inverse, on peut voir que les mathématiques sont une « réalité naturelle, extérieure » qui se laisse manipuler, construire, comme le monde matériel se laisse lui aussi construire et manipuler. Il s'agirait d'une réalité qui existe extérieurement à nous selon ses règles univoque et que l'on peut les manipuler de façon élémentaire comme se laisse manipuler les électrons, les atomes, les molécules et de façon générale, la matière.

Et c'est bien sûr la seconde option qui m'est apparu comme plus réaliste pour plusieurs raisons :

- le fait que beaucoup de mathématiques, de schémas univoques existent et se révèlent en dehors de nous. Ces objets nous parlent d'une réalité extérieure qui existe indépendamment de l'homme.
- le fait que les objets construit ne peuvent être construits en toute liberté, selon n'importe quel mode. Tout construction n'est pas viable, il y a des règles à respecter, il y a des contraintes incompressibles, un cadre rigide : le cadre des mathématiques et de leur fonctionnement possible.
- Et peut-être encore davantage, le fait qu'une construction choisie possède des conséquences non visible a priori. Des conséquences qu'il faut découvrir, des structures insoupçonnées à dévoiler. Il s'agit donc d'une réalité qui nous est indépendante. Le chercheur en mathématique scrute pour découvrir ces réalités extérieures à lui. Les mathématiques se découvrent aujourd'hui comme on découvrait des terres vierges hier. Elles sont visitées par le novice, comme on visite des régions éloignées.
- L'existence d'une part extérieure était à l'origine de ma perception et cette liberté de construire ne la réduisait pas à néant.

Il restait à voir qu'elle était la part humaine dans ces mathématiques. Et ce point nouveau était à prendre en compte : les mathématiques ne sont pas seulement une réalité extérieure d'observation, elles sont aussi objet de création, de liberté. A ce stade les mathématiques sont comparables à une matière réelle à manipuler, étudier et observer,... Peu importe la méthode, à ce stade. Les objets mathématiques sont des structures que l'on peut observer, disséquer, modifier,… Les mathématiques restent ainsi un ensemble de réalité dont les chercheur tentait de découvrir l'étendu, l'utilité, …

Partant de l'existence extérieure, la réalité mathématique s'étendait ainsi à l'observation, la découverte, la manipulation. C'est une approche systémique, séduisante en cohérence interne ; seulement la réalité de la pratique mathématique est encore bien éloignée de cette présentation. Cette description est-elle une simple construction intellectuelle auto-satisfaisante ou existe-t-il bien derrière la pratique mathématique une réalité pertinente ? Pour avancer il faut se rapprocher de la pratique mathématique.

3-La spéculation

L'usage des mathématiques consiste la plupart du temps en résolution d'équations, en manipulation d'affirmations, en déduction de solution, en affirmation d'impossibilités. Quel rapport entre ces manipulations de phrases et le monde des objets inflexibles extérieurs à nous ?
Parmi les remarque les plus dissonante qui existe entre l'idée d'un beau monde extérieur univoque et notre pratique des mathématiques, c'est le fait que notre pratique soit indissolublement l'idée au concept de vérité et d'erreur. Nos manipulations sont fondées sur l'affirmation, la négation, la résolution.
Ces concepts sont éloignés de l'idée de structure qui s'observe et s'affirme d'elle-même. Et que pourrait-on nier dans une réalité mathématique. La réponse à cette dissonance réside dans la compréhension de l'observation et de notre accès aux mathématiques.

Notre observation du monde est parcellaire toujours focalisé en un concept, un schéma. On observe jamais qu'une réalité à la fois, réalité prise à l'intérieur d'une structure plus vaste. Nous sommes toujours concentrés sur des concepts locaux. D'après notre théorie de la pensée, c'est un mécanisme humain que de ne ressentir qu'un sentiment à la fois, que de n'être concentré que sur une chose à la fois (aussi riche soit-elle, conceptuellement). La manipulation des mathématiques consiste pour l'essentiel à poser des contraintes et à vérifier leur vérité ou trouver leur résolution. Quand on comprend que décrire une contrainte repose sur le même mode d'expression que réaliser une observation, les choses s'éclairent : quand on fait une observation, on établie des liens ou des reconnaissances entre différents schémas locaux. Ces reconnaissances, ces contraintes expriment la réalité de la structure. Et bien, spéculer sur la vérité d'une contrainte, consiste de la même façon à mettre en reconnaissance deux réalités locales. La différence est que dans le premier cas on le dit parce qu'on le voit, dans le second, on le dit parce qu'on le suppose, on le cherche ou on le veut tout simplement.
De ce mécanisme vient la possibilité de « dire des choses fausse ou vrai » sur les objets mathématiques. Cette possibilité provient de notre pratique à isoler des concepts locaux et à les soumettre à une reconnaissance distante. C'est la même faculté que le mécanisme de la reconnaissance, à la différence près qu'il ne s'agit pas d'une perception. L'affirmation, base de l'observation et de la spéculation, consiste à mettre des éléments locaux dans un schéma global.
Tout cela explique la facilité qu'il existe à établir de fausses reconnaissances, à être tromper par son intuition, ou même par son sentiment d'évidence. En d'autre terme l'observation elle-même n'est pas fiable. L'observation elle-même est spéculative.
La spéculation consiste en des affirmations qui peuvent être vraie ou fausses et qui regroupent beaucoup d'attitudes bien différentes (la tentative de description, la conjecture, la tentative de résoudre des contraintes pratiques dont on ne sait pas la réalisabilité, la recherche d'objet satisfaisant des contraintes, etc.)
C'est notre accès parcellaire à ces structures qui nous oblige à parler d'elles sous forme de reconnaissance locale et nous ouvre la possibilité de l'erreur. Cela étant compris il a fallut décortiquer l'édifice mathématique classique pour en comprendre les concepts

fondamentaux, la morphologie générale avec laquelle on abordait les objets mathématiques.

Par cette approche, on dispose d'un recul suffisant pour observer la pratique classique et le fondement choisit pour décrire les mathématiques. On possède ainsi des critères d'observation, des objectifs morphologiques.

Vérité et objets mathématiques

Histoire de logique

En étudiant les mathématiques formelles qui constituent aujourd'hui le fondement le plus standard, il est apparu que l'édifice moderne des mathématiques avait chassé la notion d'objet en se concentrant sur la notion d'affirmation (je préfère dire « contrainte ») .
On peut y voir un phénomène historiquement naturel : les mathématiques se sont formées selon notre besoin et notre pratique des mathématiques : la manipulation des affirmations. Que ce soit pour observer ou pour spéculer, le langage des contraintes est adapté notre pratique en mettant en avant ce qui nous intéresse le plus dans notre mode d'accès aux objets : la manipulation et la vérité des affirmations. Les mathématiques sont des structures du monde qui n'ont d'utilité qu'à être observées et manipulées correctement. Leur existence extérieure, leur nature profonde, leur mode de liaison à nos pratiques a peu d'importance. C'est notre prise sur elles, notre pouvoir de connaissance et d'usage en direction du monde qui est l'intérêt des mathématiques.

Ainsi le concept de « manipulation vraie » est devenu fondamentale (les algorithmes, la dérivation de vérité,…), et avec lui, le concept « d'affirmation vraie » (les théorèmes, les démonstrations,…). Toutes ces vérités doivent pouvoir être garanties par une pratique efficace, fiable. Etant l'objectif de nos attentes, quoi de plus efficace, de plus naturel que d'en faire le fondement des mathématiques. On a cherché les fondements pour nous garantir de l'erreur (et l'histoire des mathématiques a montré qu'il n'était pas facile d'éviter les erreurs).

Et pour plus de succès, la notion même de vérité a été intégrée aux affirmations dans le cadre mécanique du langage de Frege au départ : la négation qui prend un sens face à chaque concepts élémentaire 'et' , 'ou', 'il existe', 'quelque soit', 'implique', 'égal'. Plus tard avec 'appartient' de Cantor. On a là, une structure de Boole combinée au langage de Frege. Cela forme la vérité intégré à l'intérieur du langage d'affirmation. En fait, il est probable que l'intégration de la vérité dans le langage ait été beaucoup plus naturelle et inconsciente que cette explication le propose. D'un côté la « vérité des affirmations » est apparu comme une réalité de la même nature univoque que toutes les autres pratiques mathématiques (l'algèbre de Boole), de l'autre on avait de cesse d'exprimer les idées de vérité par le soucis de justesse. Dès lors l'utilisation de la vérité dans les affirmations peut apparaitre comme une évidence. Les mathématiques parlent du vrai et du faux avec univocité, c'est leur nature constitutive. Le vrai et le faux étant notre préoccupation, le langage s'est naturellement constitué en affirmation et en négation. Si dans la pratique quotidienne des mathématiques, tout cela fonctionne très bien, d'un point de

vue fondationnel, on n'avait pas idée de la taille du loup qui entrait dans la bergerie.

Dans le système formel ainsi conçu, les objets fondamentaux sont les affirmations. Les règles de manipulation permettent de les transformer de façon purement mécanique. On a besoin d'aucune intellection, d'aucune sémantique, d'aucune compréhension. Les manipulations peuvent être réalisées par des automates (par les ordinateurs qui ne font que manipuler des 0 et des 1), sans aucune notion de vérité. Dès lors les affirmations de vérité perdaient leur sémantique aléthique pour devenir des symboles manipulatoires mécaniques. Et ainsi la vérité embarquée dans le système est devenue une structure neutre de toute vérité. La vérité correspond à une attente, à une confirmation extérieure. En transformant la vérité en mécanisme, elle ne fait plus que simuler son rôle extérieur. On pourrait changer les noms de ces symboles de vérité par des symboles fantaisistes, en conservant les mécanismes, tout fonctionnerait à l'identique sans plus parler de vérité. D'un côté c'est un gain, énorme : c'est parfaitement adapté à la pratique des mathématiques comme garantie d'efficacité, comme outils de traçabilité de la vérité (si on laisse les bonnes étiquettes); c'est un environnement bien ficelé pour manipuler les mathématiques avec une immense fiabilité possible. De l'autre côté (celui de la compréhension des mathématiques), un mystère commençait à s'épaissir au rythme des curiosités et des découvertes aussi gênante (les paradoxes) que surprenantes (les transfinis, le théorème d'incomplétude de Gödel).

Il me semble que cette lecture donne un éclairage intéressant à l'histoire de la logique : il s'agissait d'accomplir un objectif de base : la fiabilité manipulatoire. Il est apparu clairement que notre visibilité était limitée, et cela d'autant plus que la technicité grandissait à un rythme effréné. Nos regards étaient souvent faussés par une imagination erronée, par une perception pas assez fine des réalités en jeux ou des possibilités conceptuelles. En deux mots, on fait beaucoup d'erreur en manipulant les mathématiques, même avec les meilleures intentions. On a construit un petit monde idéal pour garantir la fiabilité de nos manipulations mathématiques. Petit paradis qui s'est révélé par ailleurs très accommodant pour la recherche de solution à des contraintes ; un environnement idéal. Par un cadre unique, on cumulait ainsi la fiabilité et l'utilité pratique.
Seulement ce petit monde n'est pas sans gênes, défauts, questions ou illusions. Armé de la notion de neutralité aléthique, beaucoup de chose ont changé de perspective. Si les systèmes formels ne sont que des mécaniques neutres de vérité, que penser du théorème de Gödel affirmant construire une phrase ni vraie ni fausse. Comment une mécanique aussi bien huilée soit-elle peut « affirmer » une telle chose ? Si conformément à mon intuition, la notion de lien univoque, de mécanique est plus proche de la nature profonde des mathématiques que ces mondes étagés de vérités contradictoires (voir le paradoxe de Skolem), il est utile de réfléchir à la signification du théorème de Gödel tellement axé sur la notion de vérité. Les idées d'univocité, de lien et d'interprétation, me semblent à même de dénouer bon nombre de difficultés conceptuelles que rencontre le fondement des mathématiques.
Pour commencer on peut dire que le mot de « vérité » paraphrase assez bien le mot « univocité ». Cette comparaison n'est pas hors propos dans le sens ou la mécanique mathématiques fonctionne sans accro. Seulement vu selon notre perspective cette

vérité n'est pas une confirmation à une attente, ce n'est pas la validation d'un doute. Cette vérité parle d'une nature intrinsèque. Comme la lumière est éclairante, comme le mouvement est déplacement, les mathématiques sont univoque. Il existe dans la nature, un monde manipulatoire qui fonctionne : les mathématiques. Vu sous cette angle la vérité des mathématiques est pauvre. La vérité qui nous intéresse beaucoup plus est la confirmation des affirmations qu'on peut énoncée. Cette vérité parle d'une attente de fiabilité. On ne parlera plus que de cette sorte de vérité là.

Ainsi la vérité existe en mathématiques, mais c'est un passager clandestin. Elle a été embarquée dans le navire par désir de sécurité. Seulement une « vérité » authentique est faite pour mesurer la position du bateau par rapport à ce dont il parle (la validité des affirmations). Pour cela la vérité devrait se trouver en dehors, pour confirmer ou infirmer des attentes, pour constater si le but de la route est atteint. Attacher le quai à un bateau ne suffit pas à dire qu'il a accosté, il faut la présence du continent derrière le quai. C'est bien ce qui est arrivé aux mathématiques : après avoir embarqué la vérité, il n'y a plus aucune distance à mesurer entre affirmation et objectif, il n'y a plus de confirmation possible. Une fois à bord, la vérité ne peut, comme toute cette mécanique, qu'être manipulée. C'est ainsi que la notion de vérité a disparu des mathématiques. Seulement on avait toujours besoin de ces confirmations extérieures, il a donc fallut récréer une autre vérité pour évaluer les affirmations. C'est par la notion de modèle d'une théorie qu'on a pallier cette absence.
Bertrand Russell a dit « Les mathématiques sont une science où on ne sait pas de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai » ; que de chemin parcouru depuis l'idée que les mathématiques sont la science du vrai. Cette phrase prend tout son sens par l'explication de la vérité embarquée. Sa manipulation fonctionne bien, mais elle n'est le témoin d'aucune confirmation extérieure. On peut toujours l'appeler « vérité », car l'univocité ne trompe pas nos attentes manipulatoires. En fait, il se trouve que la vérité intérieure parle bien de « quelque chose de vrai ou faux », mais pour « parler ainsi », pour posséder une telle interprétation, il faut une liaison de sens connue entre l'affirmation et un objet extérieur auquel elle se réfère. A l'inverse la « vérité » présente dans une proposition ne parle pas de la « vérité de cette proposition ». Or en ne manipulant les propositions comme objets fondammentaux et en excluant toute référence extérieur, la vérité intérieur n'a plus de sens à qui se rapporter. Elle ne dit donc plus rien. Il ne s'agit plus que d'un mécanisme. L'utilisation principale de la vérité consiste à dire si une affirmation est vraie ou fausse. En plaçant la vérité dès le début de la manipulation dans les affirmations, à aucun moment cette vérité n'a pu mesurer la distance de cette affirmation à l'objet extérieur dont elle parle. La vérité manipulée dans les phrases ne parle donc ni de 'vérité', ni des affirmations, ni d'objet extérieur qui ont disparu. Il ne reste plus qu'à voir cette vérité intégrée comme de simples concepts manipulatoires. (En pratique les mathématiciens se représentent toujours les objets dont parlent ces phrases, de sorte que la vérité manipulée possède un sens 'réel' et extérieur. Mais dans le système formel servant de fondement aux mathématiques, il n'y en a plus. Il a fallut recréer une autre vérité: les modèles. La vérité est enfin retournée hors du bateau pour prendre la mesure des affirmations intérieures. La vérité est devenue l'adéquation entre un modèle et une théorie (un ensemble de contraintes). Dans ce contexte, la vérité rejoue son rôle initial : affirmer si des affirmations sont justes

ou fausses à l'égard d'une structure donnée. La vérité intérieure, pieds et mains liés, n'ayant rien à dire, il fallait une autre vérité permettant d'observer, d'affirmer, de spéculer sur l'objet décrit par les contraintes. Mais on verra que là encore le discours est passablement artificiel.

Distinction intérieure extérieure

Cette construction des fondements mathématiques a eu pour conséquence de séparer la vérité en deux :

- La vérité syntaxique : la vérité intérieure qui est une structure neutre parce que manipulée mécaniquement. Son rôle est d'être évocateur : la vérité embarqué est une structure qui modélise une idée de la vérité (l'idée booléenne, il y en a beaucoup d'autres). C'est une conception binaire de la vérité, intéressante et surtout très adapté aux mathématiques que l'on veut asserter. On veut le vrai, le fiable, tout le reste est faux (d'où certains désagréments sémantique face à quelques connecteur comme le 'ou' ou le implique). La manipulation des objets-vérités se fait conformément à ce code de fonctionnement. Ca ne peut que fonctionner, puisque c'est une mécanique faite pour. Vu ainsi, les mathématiques ne nous dévoile pas le sens de la vérité, elles choisissent un sens particulier pour une vérité embarquée. L'intérêt est que ce choix n'est pas complètement subjectif, il modélise une attente et un aspect du fonctionnement du monde (toujours modulo une interprétation et un cadre qui autorise ces interprétations).
- La vérité sémantique : les objets de manipulation étant devenus des objets-vérités neutres de toute mesure de vérité, il a fallut se placer à l'extérieur pour vérifier ce que dise ces affirmations. Comble de l'ironie, pour assurer que ces affirmations parlaient bien avec vérité des objets qu'on souhaite, il a fallut recréer à l'extérieur de ces phrases et les objets et la vérité qui avaient disparus(!) Les objets à vérifier sont appeler les modèles. La vérité est définie par le lien de conformité manipulatoire qui existe entre le modèle et la structure d'objet-vérité.

Je défendrai ultérieurement le point de vu qu'un fondement plus simple aurait été plus pertinent : les objets à étudier d'un côté, les affirmations sur les objets de l'autre et la vérité au milieu indépendante de l'un et de l'autre mesure les rapports. Dans les systèmes formels, tout est là sauf que la vérité embarqué paraît tout simplement être de trop. Maintenant, il ne faut pas croire que la stratégie adoptée par les systèmes formels n'est là que par hasard ou par maladresse. L'objectif était la sécurité. Pour y parvenir Tarsky a complètement isolé le monde des affirmations (le cœur de la pratique mathématiques) de toute tentative de comparaison à un objet extérieur. En faisant cela il gagnait une efficacité assurée : une mécanique fonctionnant seule n'ayant plus aucun point de comparaison possible ne peut pas poser de problème de vérité. Le système est ainsi devenu complètement fiable, à l'abris de toutes contestations : vu ainsi on retrouve la nature première des mathématiques : elles fonctionnent. Mais de l'autre côté, n'oublions pas qu'il s'agit de phrase affirmative, elles sont sensé parler de quelque choses. Cet isolement les a privée de toute correspondance. Les affirmations ne parle plus de quelque chose, on peut seulement dire qu'elles parlent. Elles sont en sécurité parce qu'elles sont seules. Toutefois avec la notion de modèle, on retrouve l'idée de

comparaison. Mais c'est une comparaison plus que prudente : il n'y a jamais aucun contact. La liaison est aseptisé au travers d'une vitre infranchissable : la notion de « vérité sémantique ». C'est l'idée théorique qu'il « faut bien » qu'il existe dans le modèle une vérité pour chaque affirmation du système intérieur, sans jamais chercher à l'établir. Dans les modèles simples, l'interprétation est évidente et tout marche bien en parallèle, chacun dans son monde. Mais face à des questions de définition, de pertinence, de bon sens des affirmations, le système isolé s'affranchit de toute difficulté. Quelque soit le modèle extérieur et sa pertinence, le système intérieur parle dans le vide sans s'en soucier. Le modèle intérieur est la référence autonome. Tout modèle désirant trouver du sens, désirant être perçu par un « système d'affirmation axiomatique», devra se débrouiller pour se raccorder à son interface lisse, devra établir sa reconnaissance sans se lier. Le système intérieur ne fait que fonctionner indépendamment de ses tentatives de liens.

En proposant la vérité comme intermédiaire entre l'objet et l'affirmation, on perd l'avantage de la mécanique manipulatoire. Si la perspective que je propose est pertinente, elle rend clair la nature du fondement classique des mathématiques : ce n'est pas un fondement du monde mathématique, c'est le fondement d'un monde sécurisé (et/car devenu autonome) de la pratique mathématique. C'est un monde cloisonné de toute réalité extérieure, en particulier des objets étudiés. On n'a pas besoin d'objet pour définir une théorie, d'où la phrase de Russel qui dit qu'on ne sait pas de quoi on parle. C'est un monde autarcique enfermé dans une tour d'ivoire, qui se suffit à lui-même en ne pouvant dire que des choses vraies, ou plutôt ne pouvant dire que des choses manipulatoires.
Heureusement, il ne s'agit là que de l'aspect théorique. Dans la pratique les mathématiciens ne font de cette pratique mathématique qu'un usage de fiabilité, ce à quoi il est fort bien adapté… à partir du moment où l'on sait y traduire une structure univoquement. Tout fonctionne bien, tant que le système ne s'interroge pas sur sa propre structure. On risquerait de se perdre à qui dit quoi. C'est là ce que va tenter Gödel...

Comprendre la neutralité de la structure de la vérité embarquée comme principe mécanique au même titre que les autres principes mécaniques, et comprendre à côté la possibilité de spéculer sur la vérité de toute structure est essentiel pour décortiquer le théorème de Gödel. Car non seulement il va étudier la vérité intérieure en spéculant par des questions de vérité extérieure. Mais tout cela sera fait avec un unique langage. Il va étudier la vérité d'un système formel avec… ce même système formel. Il sera important de distinguer dans son propos ce qui est vérité intérieure de ce qui est spéculation extérieure. Pour cela on peut donner tout de suite quelques repères (non exhaustifs): tout ce qui est procédé mécanique bien défini est une structure pouvant être vue comme neutre ; par contre des questions sur la vérité d'une phrase exprimée en langage vernaculaire ou par un procédé distinct du modèle, voici une interrogation extérieure. Il s'agit d'une perspective importante qui nous servira à l'étude du théorème de Gödel. Au lieu de s'attacher à des vérités énoncées par des affirmations formelles et de les appliquer comme des théorèmes validés, on s'attachera à isoler tout ce qui est

mécaniquement constructif et bien défini, de tout ce qui est interprétatif. Il faut distinguer ces constructions mécaniques des raisonnements sur ces constructions.

Si Bertrand Russell disait qu'en mathématiques on ne sait pas de quoi on parle, c'est parce que ce sont les contraintes qui sont devenues le centre du regard au lieu des objets. Intuitivement, une contrainte est faite pour parler d'objets extérieurs. Les objets sont souvent difficiles à définir, tellement subjectif dans nos esprits. Les affirmations (les contraintes) sont un cadre plus stable, plus réduit. De plus les contraintes permettent de traduire exhaustivement les objets. Il n'en fallait pas plus pour évacuer complètement les objets. Les contraintes, qui parlent très bien de ces objets inutiles, se suffisent à elle-même, et les mathématique deviennent science de l'affirmation et non plus science des structures comme on le souhaitait au départ (personnellement je situerai encore ailleurs la nature des mathématiques: la science de l'univocité. Les structures n'en sont pas la seule expression. L'algorithmique, la manipulation dynamique sont des pratiques univoques bien différentes des « structures figées »…mais c'est un autre problème).

Chercher l'erreur

Prendre les affirmations comme fondement des mathématiques au lieu des objets qu'ils décrivent a conduit à ne considérer plus qu'une seule et unique structure : les affirmations du langage formel sous l'usage des règles de manipulation. Toutes les phrases seront manipulées selon les même procédés mécaniques, et « l'erreur » au même titre que la vérité.
Encore faut-il bien distinguer ce qui s'appelle « erreur ». Au niveau du langage qui se forme selon des règles univoque, l'erreur n'existe pas. L'affirmation « A et non A » (qui signifie que A et non A sont vrais) est une phrase bien formée, il ne s'agit pas donc pas d'une erreur dans le langage. Par contre quand on considère que ce langage parle de quelque chose d'autre que de lui-même, il semble difficile d'accepter une telle phrase. L'incorporation de la structure de la vérité dans le langage avait pour objectif de parler de la vérité des affirmations à partir du langage. En effet quand on dit non(A) cela sous entendait au départ que A n'est pas vraie. Mais il se trouve qu'on peu s'intéresser à savoir si « non(A) » elle-même n'est pas vrai. Il y a toujours moyen d'observer une affirmation depuis l'extérieur (à partir du moment où l'on sait de quoi elle parle). Ainsi s'est constitué le langage formel avec la vérité embarquée : en lui-même il n'y a ni erreur ni vérité, mais seulement des manipulations. Le langage formel bien constitué et sa manipulation (correctement menée) ne peuvent engendrer aucune erreur.
L'objectif est malgré tout de « parle des objets extérieurs ». Alors, à l'intérieur de toutes ces phrases du langage bien formé et bien manipulée, on a choisit des sous-structures qui sont la description d'objets extérieurs. La sous-structure consiste à choisir un socle d'axiomes (de phrase réputé bien décrire un objet extérieur) qu'on le manipule selon des règles de déduction. L'ensemble de toutes le phrase que l'on peut générer à partir de ce socle forme une structure complète sensé décrire l'objet extérieur (c'est une structure autonome qui ne chercher aucune garantie de bonne description). Ces structures s'appellent des théories. C'et un mot bien choisi pour dire qu'on suppose que cette structure parle bien d'un objet envisagé.
Dans ces théorie la manipulation devrait nous garantir de ne pas écrire une phrase comme « A et non(A) ». Ainsi une telle phrase n'est pas une erreur au niveau du

langage (où la structure des phrases bien formée peut sans complexe affirmer des choses qui nous paraisse fausses et pourquoi pas « A et non A »). Si par contre une théorie permettait d'écrire une telle phrase, il est difficile d'imaginer que la description d'un objet extérieur puisse conduire à affirmer une vérité et son contraire. On dira donc que cette théorie n'est pas cohérente. Un choix d'axiomes (qui engendre une théorie) est cohérent s'il évite la fameuse phrase. Voilà comment une manipulation mécanique neutre de vérité en soi peut « parler de » la vérité et de l'erreur. Ainsi l'erreur est cadrée, elle n'est plus dans la manipulation du langage mais dans son interprétation. Elle nait d'une « incohérence » dans un choix d'axiome qui accessoirement parle d'un objet.
Et on peut pousser le bouchon un peu plus loin puisqu'il n'y a pas d'objet dans le monde des manipulations formelles. Il n'y a pas d'erreur dans la théorie incohérente, elle fonctionne comme les autres; l'erreur serait plutôt dans l'affirmation que cette théorie modélise un objet (un modèle) qui calquerait la structure d'un tel langage. Et l'on retrouve que la vérité n'appartient pas au monde fermé du langage manipulatoire. La vérité, et l'erreur deviennent assez technique à interpréter. C'est la conséquence de les avoir formalisés et mécanisés : ils sont exilés à l'extérieure, mais doivent posséder leur double à l'intérieur.
On est face à un problème profond de la fondation des mathématiques : un erreur naïve c'est quand on constate que ce qui est affirmé ne colle pas avec ce dont on parle. Mais comment des mathématiques qui sont une structure univoque pourrait ne pas coller, à son propre regard. C'est le même constat qui m'a fait imaginer que la vérité n'avait rien à voir avec les mathématiques, c'est le même constat qui rend difficile la construction d'un édifice mathématique avec une place pour l'erreur. Dans les mathématiques pour elle-même, tout fonctionne bien, il n'y a pas d'erreur. Et pourtant dans nos manipulations il y a sans arrêt des divergences de vérité entre ce qu'on affirme et … et quoi au juste ? et les objets dont on parle. Le langage sur les objets est séparé des objets puisqu'il peut dire des choses fausses sur eux. Le fondement mathématique classique a bien reproduit cette séparation par la distinction théorie (les affirmations du langage) et modèle (les objets dont on est sensé parlé). Seulement les modèles ont eux aussi été aseptisé pour fonctionner sans erreur. On les regarde comme des objets, mais ce ne sont pas les objets naïfs auxquels on pense. Il fallait que toutes les mathématiques entre dans un même cadre.
Mais en voulant réunir tout cela sous un seul et même cadre (on pensera aux « modèles intérieurs »), on pose le problème profond de la distance avec soi-même : pour parler d'erreur et de vérité, il faut comparer l'adéquation, la bonne correspondance, la reconnaissance d'un parallélisme. On ne peut pas à la fois avoir une unique mécanique qui fonctionne complètement bien sous tous ses rouages et parler de la vérité qui suppose un décalage possible, un mauvais fonctionnement. La fondation formelle des mathématiques y est parvenu pourtant, au prix de reléguer la vérité à une interprétation dans le mécanisme. Ce type de comportement est appelé vérité, cet autre type est appeler erreur, dans un mécanisme unique complètement huilé. La vérité est reléguée au rang d'une interprétation. A chaque tentative de ficeler le tout en un unique mécanisme, la vérité se trouve mise hors jeux. Le cadre du langage formel est un système mécanique. Il ne peut rien dire de vrai ni de faux. Puisque c'est un mécanisme univoque, il est « infaillible ». C'est dans la nature des mathématiques.
Cela engendre un problème qui n'est pas des moindres : imaginons que ce cadre

formel, sans erreur possible, soit finalement très médiocre pour parler des choses qu'il observe, imaginons qu' « il ne voit pas » certaines réalités, certaines nuances. Dans ce contexte où aucune erreur n'est permise, comment pourrait-on évaluer l'efficacité de ce cadre qui ne peut que fonctionner correctement ?

Le bunker paradisiaque

Cette fiabilité de fait, cette vérité indétrônable concerne uniquement la manipulation mécanique et le cadre théorique. En pratique, on ne peut s'empêcher de « voir » les objets dont le langage est censé parler. Même si on a évacué les objets, sans plus aucune communication avec eux. Sous peine de vacuité, on ne peut se retirer de l'esprit que « les théories nous parles des objets qu'ils décrivent ». C'est pourquoi la culture mathématique ambiante a naturellement réifié les « objets » qu'elle ne manipule pas (objets qui n'ont aucune réalité extérieures aux manipulations comme les transfinis par exemples).
En réfugiant les mathématiques dans un système séparé du monde des objets, Tarsky à résolument mis les fondations des mathématiques à l'abri de toute critique de pertinence. Au final, comme elles suffisent à modéliser la pratique mathématiques courante et qu'elles ne peuvent pas contenir d'erreur (car mécaniquement univoque), la question de la vérité et de l'erreur se sont éloignés, mais avec elles aussi tous les concepts intermédiaires qui ne sont pas des moindres : le bon sens, la pertinence, l'indépendance de sens,…

Une fois un système complètement mécanique établit, quoi d'autre que le faire fonctionner ? Et comme ça fonctionne et que c'est suffisant que pourrait-on dire ? On s'est auto-piégé (ou… mis en sécurité), on ne peut plus voir ce qui pose question, ce qui gêne (ou… les questions de fond ont été résolu). Seulement, on ne voit plus qu'il ne s'agit que d'une approche idéale, coupée du monde réel. Ce commentaire ne concerne que la théorie, parce qu'en pratique les mathématiciens se « représentent » toujours mentalement les objets dont parlent leurs phrases formelles. D'ailleurs, c'est à la base du fonctionnement humain, on ne peut pas chasser la sémantique. Et je ne parle pas de la « sémantique de Tarsky » qui a décidément capté le seul mot parlant des vrais objets qui restait disponible pour le mettre lui-aussi en boite (ou… en sécurité).
On se représente les objets dont on parle, et dans cet espace très peu verbalisé, mais finalement très abondant, il y a à ressentir, il y a dire. Il y a à s'interroger sur la pertinence de ce modèle qui fonctionne si bien. Les phrases de ce langage mécanique parlent-elles bien des objets qu'on étudie mentalement ? La réponse fasciste est : tu fais moins bien avec ta pensée intuitive qu'avec la structure, alors ait confiance dans la structure. Seulement, même sous la plus haute dictature de l'esprit, il existe toujours au moins (et souvent beaucoup) des sentiments d'insatisfaction… surtout quand ça coince dans quelques entournure. Fermera-t-on les yeux sur ces quelques minuscules difficultés au profit de l'efficacité globale et solide du système ?
Trêve de politique, revenons à ces sentiments problématiques, car ce sont eux les révélateurs d'incomplétude. En observant certaine phrase du système, il y a matière à s'interroger sur la pertinence sémantique de ces phrases (par exemple la phrase mystérieuse du théorème de Gödel). De façon plus générale, ce n'est pas parce que la

mécanique propose une sémantique à peu près correcte pour tout ce que l'on pratique communément que toute la mécanique possède une sémantique satisfaisante. Je ne suis curieusement pas en train de dire que les systèmes formels sont insuffisants pour exprimer les mathématiques, mais qu'ils sont au contraire peut être trop grand… il raconte peut-être beaucoup de choses qui n'ont aucune pertinence (éventuellement ça pourrait encore aller), peut-être même parfois aucun-sens. En quoi ça gêne ? Ca gêne quand ce non-sens est utilisé pour inspirer une philosophie et par ricochet peut-être un petit peu le regard des hommes sur le monde. Et je pense justement ici au théorème d'incomplétude de Gödel qui a tellement inspiré…
En même temps, je me sens un peu idiot à dire cela, car je partage la principale conclusion philosophique du théorème de Gödel qui laisse entendre que les systèmes formels ne peuvent pas se prouver (en effet s'ils n'ont pas de vérité, que pourrait-il « prouver »), ils ne peuvent que fonctionner. Quand je dis que le théorème de Gödel ne dit pas ce qu'il prétend dire, je pense surtout qu'il ne le démontre pas. Vu de ma perspective, le raisonnement de Gödel repose sur des identifications abusives. Mais au-delà de ces choix interprétatifs, j'ai le sentiment que son raisonnement contient tout même des idées pertinentes. A savoir que les mathématiques ne disent pas tout d'elles-mêmes ; parce qu'elles ne se voient pas de l'extérieur. Et si l'on « étend » le monde pour le recréer en ajoutant la possibilité d'un regard sur soi, il ne s'agit plus du « même monde ». Quand il fonctionne mécaniquement, il ne dit pas les mêmes choses que le monde de départ.
Une mécanique est neutre, c'est l'interprétation qui donne du sens aux mathématiques. Sans le plongement sémantique, elles ne seraient qu'un schéma dénué d'intérêt. Et c'est une interprétation qui produit certaines conclusions de Gödel (reste à apprécier la pertinence de cette interprétation). Les mathématiques sont libres de toute pratique, pourvu qu'on soit conscient du lien qu'elles ont avec l'interprétation qu'on leur prête. A moins qu'une mise à distance soit utile pour se défaire de certaines illusions, pour produire une pratique mathématiques plus libre et peut-être plus fructueuse ?

Ainsi, je pense que le langage de certains systèmes formels de référence comme PM ou ZF offre de nombreuses phrases qui ne sont pas pertinentes, qui ne peuvent pas être prolongé pertinemment par l'interprétation qui fonde le système. Bien qu'ils offrent une manipulation univoque, ces systèmes n'offrent pas d'interprétation sémantique univoque. Dit autrement, ils proposent des interprétations sémantiques au dessus de leur moyen. Si on aborde ces systèmes avec la sémantique « naturelle » qui consiste à observer les objets mathématiques dont parle les phrases, le fonctionnement manipulatoire sans faille se transforme en des sentiments beaucoup plus mitigés, qui ne se contentent pas de l'idée de vérité et d'erreur, mais aussi :

- de non sens. Une phrase non univoque peut être vue comme un non sens en mathématique où l'essence est l'univocité. Je pense ici à la fameuse phrase portant l'estocade du théorème d'incomplétude de Gödel. Ou plus généralement, je pense à des phrases symboliques exprimant des algorithmes qui fonctionnent à partir de résultat donné par d'autres algorithmes qui ne finissent pas. Dans ces conditions que dire du sens de la phrase.
- d'indépendance. La force des systèmes formels par contrainte est de pouvoir construire des contraintes en fonction de nos désirs. Si on part de l'idée que les

contraintes devraient parler des objets, les contraintes seraient fausses ou vraie (en constatant sur l'objet quand c'est possible). Mais si la contrainte devient le fond de la réalité mathématiques, on peut construire de « nouveaux objets » qui sont l'affirmation de contraintes satisfaites ; peu importe si un objet existe pour les satisfaire. On peut en particulier créer des affirmations d'existence selon notre besoin (l'axiome du choix) ou même selon nos désirs (…). Ces affirmations définissent de nouveaux objets ; s'ils sont suffisamment indépendants de toute réalité de l'objet, rien ne pourra les contredire. Une telle pratique ne réclame-t-elle pas à une grande lucidité. En dehors des logiciens (et encore, ils ont les phrases comme structures), quel mathématiciens ne pense pas aux structures derrière les affirmations formelles. C'est alors un petit paradis que ces outils définissant des objets à notre propre volonté. Mais est-ce satisfaisant d'affirmer des résultats de manipulation sur un objet sans avoir aucun contre-pouvoir de pertinence à opposer. La mécanique fonctionne indépendamment de la sémantique qui doit suivre et trouver son propre chemin, subjectif.

En conclusion, les mathématiques formelles ont intégré la notion de vérité au langage en la transformant en un mécanisme (neutre de toute vérité), mais qui est sensé (et somme toute le fait assez bien) nous parler de la manipulation fiable. Ces systèmes nous parlent « à la fois » de la description d'objets et de la vérité de ces descriptions. Avec le problème résiduel de la possibilité de s'interroger de façon extérieure sur la vérité de « ces vérités », et pire encore : la possibilité de spéculer dans le même langage sur la vérité de ces vérités, et pourquoi ne pas recommencer ainsi en de nombreuses strates ; avec en plus la difficulté (ou l'avantage) de créer des manipulations, Deus ex machina, vis à vis de nos traditionnels objets mathématiques.

Liens et interprétation

Tous les changements de perspective que je propose ici, puisent leur inspiration dans le système que nous allons ébaucher ici. Pour l'étude du théorème de Gödel, il est inutile d'exposer ces principes en détail. Une esquisse sera utile et apportera un fond positif à cette réflexion, résolument critique jusqu'ici. Ce modèle repose sur l'idée que la pratique mathématique peut être organisée au travers des deux concepts : les liens et les interprétations. Je vais décrire ici les concepts fondateurs de ce modèle.

Le lien

Le fond de toute réalité mathématique sera exprimé par la notion de lien. Le lien dont il est question et à peu près la même idée qu'on trouve dans la théorie des graphes : le lien entre deux cellules. Une cellule seule n'est rien, elle est vide. Le « sens » d'une cellule sera donné par les liens qui l'unissent aux autres.
Dans l'idée de lien entre deux cellules, il y a :

- l'idée de connexion. Il y a une connexion ou il n'y en a pas. C'est blanc ou noir, pas de gris intermédiaire. On a là une expression de l'univocité. Il n'y a aucun jeu dans le lien, aucune souplesse, aucune liberté, c'est le fondement de l'univocité.
- L'idée de rapprochement de sens. Quand il y a un lien entre deux cellules, c'est la possibilité d'une communication, c'est un chemin, c'est un sens entre deux objets. (On utilisera souvent la notion de parcours sur les liens).

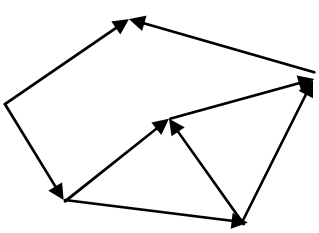
Par commodité, on prend ici le lien orienté donnant une information supplémentaire au simple lien. (Nous verrons que cela possède une importance très relative.)



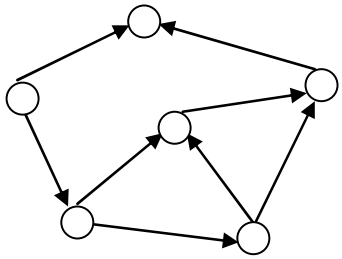
Le lien est vide de tout sens, il n'est qu'un pont entre deux réalités. Mais il sera un pont indéfectible, fondement de l'univocité : lien ou non lien, présence ou absence, réalité ou vacuité, c'est le fondement de la nature non ambiguë, inélastique, non négociable de la réalité mathématique.

Le schéma

Le schéma forme l'objet de base dans la théorie. Il est un ensemble de liens dont les connexions forment les cellules à chaque extrémité des liens. Il est aussi nommé graphe en théorie des graphes. Le graphe est la notion de base qui montre la place des liens. On les représente ordinairement par des flèches.



Mais élargissons tout de suite nos représentations en pensant qu'il existe toute sorte de façon d'exprimer des liens. Par exemple dans l'écriture symbolique d'une phrase la position relative des symboles exprime des liens (l'ordre d'écriture, les exposants, les indices, les tableaux, etc…). Pour y voir plus clair, il est utile de commencer par l'idée de flèche.
Par contre, Il faut se dégager des représentations graphiques spatialement étendue et ne retenir que l'idée de connexion, de pont existant entre certains raccords (alors que d'autres n'existent pas).
Il est utile de parler des points de raccord entre les liens : les cellules. Car elles seront un lieu de sens ajouté, le lieu de l'interprétation.



Dans notre approche, tout objet mathématique est le porteur d'une structure et cette structure possède deux dimensions :

- la possibilité d'être interprétée dont nous reparlerons après
- un sens propre univoque donné par les liens qui le constitue

Le schéma constitue le fondement du sens propre. En effet, les cellules seules, sont des points de jonction, vide de tout sens. Mais unis par un graphe, chaque cellule prend un sens chargé par l'existence des liens qui la relient aux autres. Nous avons là, l'idée que le sens se définit hors de toute autre référence que les liens mutuels. (On pourrait faire le parallèle avec les axiomes d'Euclide où points et droites peuvent être vus non comme des objets extérieurs dont on préciserait les propriétés. Mais comme des objets tous nouveaux - qu'on aurait pu appeler X et Y - qui se définissent mutuellement par les relations qu'ils entretiennent l'un avec l'autre).
Le schéma est le moyen de créer un sens complexe au dessus du « vide ». Chaque cellule porte un sens : elle est une position dans le schéma. Mais pris seul, un lien ou une cellule ne possède aucun sens. Le schéma possède donc un « sens » global (un schéma) et il définit en même temps un sens particulier pour chaque cellule. C'est tout le schéma qui donne un sens à chacune de ses cellules, par la position qu'elles occupent dans le schéma complet (c'est un regard holiste). Chaque cellule est définie par sa connexion à ses proches qui elles-mêmes le sont pareillement. Et le tout est un assemblage univoque qui possède « du sens ». On a donc un sens global et un sens local. Tout cela n'est produit que par le concept de lien ; du moins dans sa perception la plus abstraite.

Il peut sembler un peu léger de fonder les mathématiques sur le seul concept de graphe. Alors pour inspirer une certaine confiance, produisons le parallèle qui existe avec la théorie des ensembles (naïve). Elle se présente comme un cadre assez large pour définir tous les objets mathématiques. Dans cette théorie les objets sont tous rapportés à la notion de « lien » au travers de « l'appartenance ». Tous les objets mathématiques

sont définis par leur « liens » les uns aux autres au travers de la notion d'ensemble, qui est défini par l'appartenance (c'est-à-dire le lien orienté).

Au dessus du vide

Si l'idée de schéma est réellement capable de « porter » les mathématiques, et si l'on admet que l'idée de lien est une idée primitive neutre de tout sens, on a l'idée que les schémas et par la suite les mathématiques sont une construction de sens « au dessus du vide ». Cette approche permet de donner un fondement à l'univocité mathématique. Dans la connexion de liens au dessus du vide, on a une abstraction qui n'a besoin de rien d'autre que deux point de jonction « vides » relié sans rien d'autre qu'un lien, lui aussi d'une ultime abstraction, vide de tout autre charge sémantique. Ces assemblages de « vide » donnent « autre chose que du vide ». C'est le mot assemblage (lien) qui s'ajoute au dessus du vide. Ainsi l'idée de liens bien définis permet de construire toute une richesse de réalités univoques.

Structure

Le sens global d'un graphe, donne lieu aux idées de forme, de structure. Ce sens possède une unité globale, une forme. Par cet aspect global, le graphe sera au fondement de la structure. Le schéma c'est la possibilité de construire du complexe au dessus du vide. Il ne faut pas se méprendre sur la perception de ces structures, nous avons l'habitude de représenter les graphes à plat sur une feuille. Cela leur confère mentalement intuitivement une dimension spatiale, ou du moins un rapport à la spatialité. Mais au contraire, la notion abstraite de graphe est indépendante de toute spatialité. Il ne s'agit que de connexion entre des choses.

Le graphe peut d'ailleurs servir de fondement à la notion de spatialité, à la notion de dimension, à la notion de topologie. On s'en donnera une idée en remplissant mentalement des objets topologique par des graphes aux motifs réguliers. On peut ainsi remplir des espaces vectoriels, des sphères, des tores, des bandes de Möbius, etc. Quand on a couvert mentalement tout l'objet de graphe avec un maillage bien serré, on se débarrasse de la topologie sous jacente. Le graphe qui reste considéré abstraitement (chaque cellule en connexion avec ses « proches ») peut alors donnée à lui seul l'idée de la topologie sous jacente. On peut ajouter une idée de « continuité » imaginant le graphe initial qui à l'intérieure de ses maille se subdivise localement et infiniment. Par de tels procédés bien réglementés, on peut donner un sens « schématique » à beaucoup de notions géométrique (la spatialité, la connexité, la continuité, la compacité, …). Les schémas (infinis et finis) se présentent ainsi comme un support immense de traduction.

On peut prendre conscience de la puissance du « sens schématique » en reprenant l'une des images mentales précédentes et en ajoutant un lien supplémentaire entre deux cellules très éloignée pour la topologie habituelle. La conséquence topologique d'un unique lien est immense. On a construit une figure mathématique complètement différente. Le lien n'est pas limité spatialement, c'est plutôt des limites sur les liens qui engendre la spatialité. Et l'on prend conscience que le graphe peut être à l'origine d'une

complexité topologique immense dont la spatialité ne peut pas rendre compte. Tout lieux peuvent être liés, seule le manque d'imagination est un frein. C'est bien parce que les liens sont libres des contraintes spatiales qu'ils peuvent engendrer la spatialité.

En élargissant la perspective de façon encore plus audacieuse, le concept de lien m'apparait comme pouvant servir de support aux concepts physiques ; j'ai le sentiment qu'il peut rendre compte de l'espace, du temps, de l'espace-temps, du mouvement, de l'énergie, de la matière, des ondes, des probabilité quantiques, … mais tout cela est une autre histoire.

Sous l'idée que le lien est la base de la construction du sens au travers des connexions synaptiques le neurone (voir la théorie de la pensée en annexe), on peut voir le concept de lien comme la base même du sens. Ce n'est là qu'une théorie. Le concept de lien est-il vraiment suffisant pour couvrir ne serait-ce que le concept d'univocité ? Il est possible que l'univocité ait d'autres types de réalité.

Quid de l'intuition géométrique

On peut penser à la géométrie qui semble fondé sur une intuition bien différente de l'idée de connexion, c'est une intuition plus spatiale, plus continue, plus orienté vers l'idée de forme, de rupture étendue, de topologie à la fois locale est globale . Ce n'est pas le lieu de s'étendre longuement sur cette question très intéressante ; tentons d'en rendre compte en quelques mots. Je pense que la géométrie est à la fois le lieu d'un grand obscurcissement sur la nature des mathématiques et le support incontournable de leur perception. Tout cela provient du fait que la géométrie est issue du mécanisme de notre perception visuelle et que notre perception visuelle nous fournit une source immense d'intuition mathématique.

Le problème de la géométrie

Selon le modèle de la théorie de la pensée, fourni en annexe, j'explique que notre vision « ressent en une seule cellule » des millions de choses en même temps. Ces choses sont l'accumulation historique synthétisée de nos expériences dans le monde réel. Ainsi par l'accumulation historique et la synthèse abstractive, les sensations visuelles résument des millions d'expériences en un seul ressenti. On ressent « en une fois » une multiplicité immense de réalité ; dans ce ressenti existe aussi les structures mathématiques abstraites reconnaissables au dessus de l'expérience. C'est ainsi qu'on perçoit par exemple une forme circulaire (même quand on la voit sous un angle oblique), c'est une réalité abstraite reconnaissable par l'expérience qui possède des propriétés expérimentales particulières. L'univocité qui existe dans de notre intuition géométrique est une synthèse de l'expérimentation d'une vaste réalité extérieure. C'est une connaissance « experte » et non une connaissance « analytique », elle procède de l'accumulation expérimentale synthétisée. Le bon fonctionnement de la mécanique géométrique (son « univocité ») repose probablement sur des mécanismes de nature « connexionniste » qui engendre le «bon fonctionnement » mécanique de cette réalité géométrique perçue. Ces mécanismes doivent être situés au niveau de la matière, de la physique, dans le mécanisme de « connexions » élémentaires de la matière. Notre intuition de la géométrie n'est pas de nature « connexionniste » (schématique). Notre

perception repose sur une accumulation expérimentale qui a l'apparence de fonctionner univoquement sans aucune perception des mécanismes des liens qui permettrait ce fonctionnement. On peut parler d'univocité dans le sens où la manipulation de ces objets abstrait produit des mécanismes univoques. Notre perception accumulée permet de « voir » ces réalités par manipulation « intérieure ». Mais cette univocité est issue d'abstractions expérimentales, elle ne repose pas sur les « raisons » (les connexions) de son fonctionnement qui elles ne sont pas visibles.
Une fois formalisé dans divers contextes (Euclide, Descartes, théorie des ensembles, …) « l'univocité » géométrique intuitive possède des raisons connexionnistes à son univocité, de différentes natures d'ailleurs. L'intuition géométrique n'est que la connaissance expérimentale d'une structure unique : la spatialité du monde physique à l'échelle humaine. Les mathématiques, vues comme connexions et interprétations, sont beaucoup plus vastes que cette seule structure en jeux. Il a fallu beaucoup de temps pour dégager les mathématiques de la structure spatiale naturelle et pour la mettre à une distance suffisante à la compréhension de leur différence de nature ; de Euclide à Descartes, jusqu'à Poincaré, la disjonction s'établit lentement. Il n'est pas certain que la différence de nature et la raison de cette différence soit bien perçue même aujourd'hui. En témoignent les propos de R. Thom dans 'Parabole et catastrophe' qui ressent toujours la nature profonde des mathématiques dans la géométrie étendue.
Ainsi le problème de la géométrie réside dans le succès de son intuition : elle nous montre un vaste système en fonctionnement par un résultat accumulé, tout en cachant la nature profonde de ce résultat. Descartes a levé un coin du voile en plongeant cette perception dans une structure de liaison élémentaire (même si cette structure est probablement moins conforme à la structure du monde extérieur qu'au sentiment de manipulation de cette structure). D'autres ont participé à cette prise de conscience après lui ; mais tant que la physique et la psychologie n'ont pas rendu compte de ce mécanisme extérieur réel, il reste un mystère non déconstruit que certains pourront toujours voir comme une source première.
A l'inverse, la compréhension de la physique et des mathématiques du continu ont clairement montré comment les mécanismes de liaisons locales et globales peuvent engendrer les réalités géométriques perçues. On en a pris bien conscience quand d'autres géométries ont été mises à jour. Par ailleurs, la théorie de la pensée proposée en annexe me semble rendre compte de la possibilité de la psychologie de cette intuition géométrique à partir de l'accumulation de la perception. Sous cette approche, l'intuition géométrique relègue son « mystère » à un mécanisme.
La perception humaine est de nature « tout en un ». Elle apparait comme immédiate et profonde, mais elle repose sur le mécanisme de l'abstraction. Beaucoup cherchent le fond des choses dans ce phénomène. Mon hypothèse consiste au contraire à ne voir là qu'une accumulation instantanée synthétisée. Le nature et la compréhension des mathématiques résideraient au contraire dans la déconstruction de ces mécanismes jusqu'à leur liaison univoque et vide.

Le grand pouvoir de l'intuition géométrique

La connaissance accumulée des effets géométriques est la raison de son grand pouvoir intuitif : nous pouvons visualiser les effets, nous pouvons voir « en une fois » des objets très complexes et leur effets cumulés, nous pouvons simulés des expériences

géométrique dans nos esprits. Cette capacité de voir « beaucoup en une fois » cumulée à la synthèse d'une réalité expérimentale univoque produit la « connaissance expérimentale d'une structure univoque » par ses effets. C'est ce qui a permis la modélisation des structures jaillissant de ces manipulations. D'ailleurs même indépendamment de toute modélisation, la géométrie continue à susciter chez les praticiens des mathématiques une puissante source d'intuition. Cette puissance ne reposant pas sur les mécanismes univoques connexionnistes, mais sur une connaissance expérimentale des effets. Cette connaissance n'est pas de nature « univoque ». Elle produit beaucoup d'erreurs de perception, elle manque à produire beaucoup de perceptions univoques même simples. Elle n'est qu'une connaissance expérimentale. C'est l'immensité de l'expérience accumulée qui lui donne son grand pouvoir. La puissance de l'intuition géométrique, c'est la capacité de la pensée à ressentir en une fois une immensité de chose. Cette approche est radicalement contraire à l'approche démonstrative qui construit tout un par un. A l'opposé la faiblesse de cette approche est qu'elle n'est pas de nature univoque, elle repose sur des appréciations, des estimations, des ressentis ; variables, faillibles. Sa nature est le ressenti instantanée d'un fonctionnement du monde extérieur complexe en non réduit, ce n'est pas le ressenti rigoureux d'une manipulation univoque.

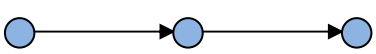
Si cette analyse est pertinente, l'intuition géométrique peut nous servir de guide, de plan, de « vue du haut », pour trouver notre chemin dès qu'une structure univoque sera apparentée à «la spatialité extérieure ». Mais cette intuition n'est pas le fondement d'un « autre type » d'univocité, dans le sens où elle ne reposerait pas sur une nature connexionniste. Et l'on comprend pourquoi l'intuition géométrique procure un sentiment d'univocité (un sentiment de précision et de bon fonctionnement absolu), sans posséder aucunement les sources de cette univocité (mises à part quelques sous-structures synthétisées qu'il ne faut pas oublier, on pensera aux axiomes d'Euclide, à des groupes de symétries spatiales, etc…).

L'intérêt fondamental de la notion de lien est sa vacuité. Elle peut servir de support sémantique à beaucoup de concepts fondamentaux. Pour parvenir à quelque chose de consistant, de différentié, qui permette de couvrir les mathématiques, la notion de graphe n'est pas suffisante. Beaucoup d'autres notions seront nécessaires. Le concept d'interprétation permet de les regrouper avantageusement.

L'interprétation

Charge sémantique ajoutée

Un graphe n'endosse la puissance de la signification que lorsqu'il est doté du principe d'interprétation. Le graphe seul ne signifie rien. L'interprétation, c'est l'étape qui consiste à voir dans un objet initial une autre chose que cet objet.
Dans le graphe suivant,



je peux voir le nombre trois, je peux voir une composée de deux fonctions quelconque, je peux voir l'inclusion successive dans deux ensembles plus grand, je peux voir un ensemble ordonné de trois éléments variables, je peux voir un parcours de trois éléments d'un graphe pouvant être appliqué à n'importe quel graphe, etc….

L'interprétation mathématique est un lien informel entre un graphe et une autre réalité. En mathématiques, il s'agira souvent du lien entre deux structures mathématiques (dans une suite de fonction, il y a une chaîne d'entier qui désigne à chaque cellule des fonctions) et pour commencer simplement, on peut imaginer un lien informel entre deux graphes (par exemple construire un nouveau schéma en remplaçant toutes les cellules d'un schéma initiales par un ensemble de 3 cellules).

Dès qu'on écrit « symboliquement » (on peut penser aux phrases du langage formel ZF, par exemple), il faut une interprétation pour se représenter ce que les symboles portent comme charge sémantique a propos d'une réalité extérieure. L'interprétation nous porte plus loin que ce qui est présent. C'est le pouvoir du symbolisme, c'est à la base du pouvoir du sens. C'est ce qui nous apporte la mobilité, le raisonnement, la diversification du sens, l'analogie, la construction étagée de sens, les parallélismes, les morphismes, etc.

L'interprétation est un principe très vaste qui possède deux orientations de base :

- une possibilité sémantique : cette interprétation charge un graphe d'un sens supplémentaire à son seul sens propre. Le sens propre du graphe, ce sont les seuls liens. Le sens ajouté à ces liens c'est l'interprétation.
  Quand on observe les objets mathématiques dans le monde réel, on établit une interprétation de ces objets mathématiques. Par exemple quand on compte : 1 mouton, 2 moutons, 3 moutons, …, on charge les nombres abstrait (vide de tout autre sens que leur liens aux autres) d'une sémantique ajoutée, à savoir les moutons.
  On utilise toute sorte de symboles pour diversifier les charges sémantique des schémas (des lettres, des traits, des formes reconnaissable). Ces symbolismes portent des charges sémantiques ajoutés. Prenons l'exemple des flèches : nous avons choisi de parler des schémas avec liens orientés. Pour cela on utilise des flèches qui différencient les extrémités du lien. Par rapport au concept de lien neutre , il s'agit d'un sémantique ajouté par un symbole. Si on y voit un sens de parcours, il s'agit d'une sémantique ajouté par un contexte.
- Une possibilité univoque : l'interprétation est un rapport univoque qui uni un graphe à un autre graphe; ce peut-être un parcours fait en parallèle, une méthode de construction d'un graphe à partir d'un autre, un algorithme de modification d'un graphe par lecture de l'autre, un procédé de positionnement dans un graphes à partir du autre schémas, un contenu à ajouter, une manipulation à effectuer , etc… Dans tous ces cas, le rapport entre les deux graphes produit un résultat qui ne pose aucune ambigüité. Sous le concept interprétatif, le rapport entre les deux graphes peut être univoque.

Puis tout cela se conjugue : un graphe peut être uni à d'autres graphes par un procédé univoque, le tout peut former un objet mathématique. Cet objet peut lui-même s'unir à d'autres objets par de nouvelles interprétations et former de nouveaux objets. Cet empilement de schéma et d'objet liés univoquement, puis à la fin surtout d'objets, (les schémas stricts sont rares dans les mathématiques courantes), constitue nos objets mathématique, notre « culture » mathématiques. Les objets couramment manipulés en mathématiques sont des « empilements » de liens et d'interprétations. On peut faire un parallèle évident avec la « programmation objet » dont les objets sont constitué d'empilement de constantes, d'autres objets, d'interprétations (d'algorithmes), et même d'événement (interprétation dynamiquement dépendantes).
Nos premiers objets mathématiques sont issue d'une reconnaissance dans le monde. Mais aussi de choix culturels : choix de manipulation, choix de césures servant à distinguer ce qui est dans l'objet et ce qui n'y est pas, choix d'empilement compatibles quand plusieurs cohérence s'affrontent, etc... Ces objet sont construis, développés et admis culturellement en vertu de leur intérêt face au monde. Comme toute culture, les structures mathématiques se constituent en fonction de principes contingents, imprévisibles, chaotiques, mais aussi sous des pressions bien identifiables, variées et parfois contradictoires de l'esthétique, l'utilité, l'efficacité,… Voici posée en quelques mots, une idée de la marche historique des mathématiques au dessus des liens et de l'interprétation.

Il me semble par nature inaccessible de définir univoquement l'interprétation, car elle est justement le cadre de l'univocité. Il est fréquent qu'une interprétation « intuitive » serve à résumer un processus univoque complexe (qui pourrait être décomposé finement sous forme d'interprétation et de schémas univoque imbriqués). De telles interprétations peuvent être qualifiées d'univoques. Cela signifie qu'elles sont fondées à partir de mécanismes inflexibles et non ambigus. Il arrive à l'inverse qu'une interprétation soit plus vague dans ses liaisons, de sorte qu'il s'agit davantage d'un sens analogique, sémantique, intuitif que d'une liaison univoque. C'est fréquemment le cas du rapport qui existe entre les objets mathématiques et le monde (par exemple la physique qui « reconnait » les objets mathématiques dans des expériences).
L'interprétation est abondamment (et souvent inconsciemment) présente dans toute manipulation mathématique. C'est souvent parce qu'on voit « autre chose » qu'on peut manipuler. C'est aussi le cas dans les contextes fondés sur une recherche d'univocité maximale (on le verra dans le théorème de Gödel).

L'interprétation me semble impossible à circonscrire par le langage, car elle n'a d'autre limite que l'imagination ; dans le respect de l'univocité quand il s'agit de manipuler ; et point d'autre limite que le bon sens quand il s'agit d'ajouter des charges sémantiques.

Voici encore quelques exemples très spécifiques :

- Dans les machines de Turing la tête de lecture peut être vue comme un interprète. Elle repose sur des lois qui définissent les opérations à effectuer en fonction de l'état actuel. On peut voir ces actions comme une interprétation de l'état en cours. A chaque état correspond une action. Ces interprétation sont définies de façon univoque au point qu'une fois établit, la machine peut se « passer de nous » pour

accomplir sa succession de tâche. On pensera aussi aux ordinateurs qui « interprètent » les mémoires en se déplaçant et modifiant leurs contenus de façon tellement univoque. Il s'agit d'exemples fondamentaux de la notion d'interprétation dans un cadre qui peut servir de base à la pratique mathématique. Dans ce cadre l'interprétation est la décision d'un acte en fonction d'une valeur. L'ordinateur « voit » dans une valeur quelque chose à accomplir, autre chose que cette valeur.

- On peut voir « l'interprétation » dans la pratique la plus commune du calcul numérique. Quand j'écris (5+7)x2 la production du résultat 26 résulte de plusieurs interprétations. La manipulation mathématique repose abondamment sur ce mécanisme interprétatif qui permet de voir autre chose que ce qui est écrit. En appliquant des règles, on interprète des phrases pour en produire d'autres jusqu'à projection vers une expression simplifiée à son maximum, un nombre résultat.
- C'est aussi le cas des fonctions qui attribuent un résultat à une entrée. Les mécanismes d'interprétation peuvent y être extrêmement complexes.
- Un exemple plus informel : dans un contexte où il n'y a que des schémas, on peut voir un « nombre » comme une chaine de cellules (le nombre de cellules liées définit le « nombre »). Dans ce cadre, l'addition de deux nombres correspond à la mise bout à bout de deux chaines formant une nouvelle chaine. On peut effectuer ce processus au dessus de chaines abstraites. Il s'agit d'une « interprétation » très intuitive. Et pourtant cela révèle un mécanisme très univoque. De telles procédures univoques formeront le fondement des mathématiques pratiqué au dessus des schémas. Il faut ajouter que la charge sémantique porté par une telle procédure est très variables : on peut l'imaginer très abstraitement (juste au niveau de connexion), comme beaucoup concrètement (par déplacement spatiale, par procédé mécanique, décomposé en étapes, etc…).
- Etc.

Tous ces exemples nous parle du mécanisme de l'interprétation : la reconnaissance de schéma, d'objet, de phrase, de symbole, donne lieu à un nouveau schéma, objet, phrase, symbole. Quand on travail dans un cadre mathématique où l'interprétation est complètement formalisée, celle-ci n'apparait pas, elle est transparente. Révéler l'interprétation comme une étape à part entière de la pratique mathématique donne beaucoup de relief à cette pratique. Identifier ces passages interprétatifs me semble très utile à la compréhension des mathématiques et de leur nature profonde. Préoccupé par les résultats à atteindre, par le bon fonctionnement évident, on a tendance à passer cette réalité sous silence en se concentrant sur la compréhension de ce qui est moins visible.

La notion d'interprétation conjugue bien souvent deux aspects cumulés :

- la partie effective qui produit un résultat, qui relie deux schémas.
- La partie explicative, celle qui donne du sens, qui prend racine dans l'analogie, dans l'expérience, dans le vécu, celle qui décrit de façon informelle. Cette partie est subjective. Mais elle est indispensable car elle permet la compréhension du cadre de l'univocité. Elle est l'approche informelle qui sert de support et qui permet l'abstraction univoque.

L'explication de l'univocité conduit presque immanquablement à des commentaires subjectifs, tiré de l'expérience humaine, de la richesse des phénomènes du monde, de l'analogie mise en situation. Il n'est pas possible de dissocier complètement la partie subjective de la partie univoque. L'univocité ne peut pas naître du monde sans abstraction au dessus de supports. La compréhension analogique est une voie d'accès privilégiée à l'abstraction qui donne cadre à l'univocité.

Les mathématiques étant la pratique organisée de l'univocité, il me semble qu'on gagne beaucoup à débrouiller la partie univoque de la partie sémantique. Face à toute pratique mathématique, je propose donc de procéder à cette dichotomie :

- Distinguer d'un côté les liens clairement établis, les schémas en jeux, les connexions qui définissent les objets.
- Et de l'autre voir les sémantiques ajoutés, les lectures, le procédé de passage entre les schémas, les modes d'action, les rapports qui permettent d'unir et de structurer les différents schémas en jeux.

Il ne s'agit là que d'une technique portant sur la pratique mathématique. Ce la nous sera utile pour aborder le théorème de Gödel. Mais ici nous avons une autre ambition, il s'agit aussi d'aborder les mathématiques dans leur ensemble. Et on peut observer par ce critère les différents cadres sémantiques dans lesquels on réduit les mathématiques. Toute pratique possède un contexte, une perspective, un support sémantique interprétatif important qui est important pour la compréhension de son usage. Par exemple, le cadre explicatif des machines de Turing est important pour comprendre le fonctionnement. La pratique mathématique dispose d'une multitude de cadres différents. On a affaire a des mathématiques à partir du moment où l'objectif est une manipulation univoque. Elle apparait sous toute sorte de forme. On peut construire des cadres très locaux ou très généraux. L'ambition de la logique est de construire un cadre si générale qu'il permet de cadrer toutes les mathématiques. Si on regarde le cadre classique des théories axiomatique formelles, on constatera qu'elle n'englobe les pratiques mathématiques que modulo beaucoup, beaucoup « d'interprétations ». Par exemple pour « voir » un simple nombre entier dans la théorie des ensembles un certains nombre d'interprétations sont primordiales. L'interprétation de ces suites d'ensemble imbriqués comme les meilleurs représentants du concept d'entier ne sont pas toujours bien naturelle pour les novices d'ailleurs. Par ailleurs, il s'agit d'une ambition immense : donner un cadre unique tel qu'à une interprétation près, toute pratique mathématique s'y ramène.

La construction de ce cadre classique n'a pas été sans difficulté. Frege, Cantor, Russel, Hilbert, Zermelo, Gödel, Tarsky, et tant d'autre ont forgé la masse des concepts de ce cadre aussi curieux qu'efficace. L'observation de ce cadre formel sous les concepts du lien et de l'interprétation me semble pertinente. Cette césure formera le fil d'Ariane pour ne pas se perdre dans le labyrinthe sémantique du théorème d'incomplétude de Gödel. Les objets mathématiques sont définis par divers procédés, la distinction entre les procédés de construction et les objets eux-mêmes est une mise en relief primordiale pour s'y retrouver.

Je propose de repérer, dans une démonstration, tout ce qui est construction schématique pour servir de support aux raisonnements ultérieurs. On peut en particulier remarquer que les « schémas infinis » sont des cadres de raisonnement courants. Un procédé de construction fini établit comment déployer un schéma infini ; bien qu'on ne le fasse jamais et qu'on ne puisse pas le faire. Le raisonnement est effectué sur ce « schéma déployé infini ». En étudiant le théorème de Gödel, nous raisonnerons sur de tels schémas infinis. C'est un cadre interprétatif plus qu'utile, il s'avère nécessaire parce que le raisonnement mathématique s'effectue au niveau « des possibles ». L'objectif est d'établir des lois, des théorèmes, des observations générales au niveau de toutes les possibilités de déploiement. A partir du moment où un mécanisme est bien défini de façon univoque (c'est le problème qui reste toujours à apprécier), le déploiement de ce mécanisme, même infini, est tacitement vu comme univoque. Voilà le cadre interprétatif qui nous donne accès à des schémas infinis.

Un fond dur

Si la pratique mathématique est bien observable au travers des liens et des interprétations (décomposée au maximum en schémas lisibles par des procédés univoques), alors les objets mathématiques possèdent un fond dur, un sens univoque qui ne peut pas être décomposé davantage. Inversement, ces schémas peuvent toujours être interprétés dans un système plus riche : il suffit de charger les cellules vides d'un nouveau sens, ou de lier les objets à de nouvelles interprétations.

Ce fond schématique en lien vide de tout autre chose est une limite aux « dévissages » des objets mathématiques. C'est un fond dur pour produire des définitions d'objets mathématiques. Bien qu'il n'existe pas de cadre conceptuel unique pour le dévissage d'un objet donné, la recherche de décompositions des objets aboutira à des schémas suffisamment simples et exempts de malléabilité interprétative pour pouvoir être considérées comme un fond dur. Ce dévissage n'est pas une pratique courante, il présente souvent peu d'intérêt, (dévisser la notion de nombre entier munis de l'addition et de la multiplication est déjà d'une grande complexité interprétative accumulée), mais il est d'une utilité théorique importante. En pratique, ce sont les interprétations utilisées dans une démonstration qui génèrent ces nécessités de dévissage pour se placer dans un cadre univoque vis-à-vis des procédés en jeu. Si on considère une interprétation comme suffisamment dure et indépendante face aux interprétations utilisées dans une démonstration, on n'a aucune raison de décortiquer un procédé univoque. La plupart des procédé interprétatifs utilisés sont riches et pourtant d'une clarté univoque marquée.

Si toute cette approche est pertinente, elle devient un appui face à la subjectivité des interprétations. C'est une ligne de conduite relativement simple qui se propose comme fondement face à la difficulté interprétative. C'est un espoir pour trouver des perspectives clarifiées dans les situations mathématiques où la subjectivité du sens interprétatif est difficile à cerner.

Vers la liberté

Pour ne manquer l'objectif d'un regard pertinent sur les mathématiques, il convient de redonner ses lettres de noblesses à l'approche classique des mathématiques par les systèmes formels de contraintes propositionnelles. Le fait de pouvoir construire des réalités détachées des objets dont ils sont sensés parler n'est pas une incongruité. Présenté comme nous l'avons fait, l'axiome du choix ressemble presque à un parasite inutile et les pratiques manipulatoires comme superficielles et génératrices de pures illusions. Le discours critique avait pour vocation de montrer le décalage qui existe entre ces pratiques et le fond univoque des mathématiques.

Il me semble au contraire que ces pratiques manipulatoires peuvent porter une réelle pertinence. Nous avons appelé « formes » les objets mathématiques qui au lieu de donner un accès complet (constructi) aux objets, ne définissent que des contraintes générale où existe une liberté de choix. Cette liberté n'est pas univoque parce qu'elle ne produit pas l'accès ses contenus possibles. La « forme libre » est une compression de l'information avec « perte » des contenus possibles (ces contenus sont d'ailleurs souvent impossibles à lister en totalité). Mais toute la noblesse de la pratique provient justement du fait que la notion de condensation de l'information est essentielle à la perception. Nous l'avons évoqué, il s'agit ici d'en rendre compte.

On peut aller plus loin encore, la condensation est un aspect primordial de la pratique mathématique. En effet, beaucoup d'utilisations des mathématiques dans les sciences physiques, économiques, biologiques,… parviennent à nos yeux sous formes de contraintes. De sorte que poser la contrainte comme objet fondamental de la pratique offre un accès plus direct aux sciences mathématiques pratiques. Les mathématiques on un rôle de lecture du monde. Et au travers du concept fondamental de contrainte (qui engendre souvent l'incomplétude, à cause de la liberté sous-jacente), ce rôle d'accès au monde est bien rempli. La notion de forme libre est incontournable parce qu'elle est un recul, et le recul est nécessaire à la perception globale pour nos pauvres regards humains qui ne voient qu'une seule chose à la fois. Tant de formes libre des mathématiques sont des concepts si productifs, si riche de sens. La notion de fonctions permettant de mécaniser les relations complexes, la notion de nombres réels ouvrant à la géométrie du positionnement, les notions d'espaces si diverses, etc… En étudiant une forme plutôt qu'un objet complètement défini, on étudie beaucoup de réalité à la fois. Et la pertinence de ces études ne font aucun doute aux mathématiques complètes sous-jacente et encore moins face au monde.

En effet, bien que les formes libres ne possèdent aucun contenu sur ses libertés, elles possèdent par ailleurs une réalité clairement positive : la contrainte de forme. Et quand on se limite à cette structure de forme sans envisager de contenu explicite (sans interpréter le sens naturel de cette liberté), le raisonnement sur les formes est un raisonnement tout autant « constructif » que pour un objet complet. Je dirais même qu'affranchi de l'interprétation d'un contenu possible, et vu depuis les connexions réellement définies, les formes sont elles-aussi des objets complets que l'on peut

manipuler. C'est l'interprétation, suggérant des contenus possibles, qui est la cause de l'incomplétude. Evidement il n'y a de pertinence à l'étude des formes qu'au travers de ce regard interprétatif. Car c'est l'idée de prise de recul qui est pertinente, et il n'y a pas de recul s'il n'y a pas de détails possibles. C'est justement là que réside la puissance des mathématiques : derrière sa capacité à parler d'une structure univoque de façon mécanique, il existe des interprétations fiables et des prolongements univoques. Ainsi le traitement univoque des formes « parle bien » des formes complètes sous-jacentes. Ainsi peut se construire au-dessus des formes, une pratique univoque d'une pertinence certaines. Appliqué à une « structure complétée compatible», la structure d'une forme se transporte sans ambages par le fait que la contrainte positive de la forme est aussi présente dans la structure complète. Seulement, même si elle est univoque, toute complétion d'une forme repose sur une reconnaissance interprétative. La reconnaissance des structures repose sur une interprétation, c'est la mise en parallèle de deux structures sous un mode de lecture interprétatif bien défini. Cela n'est en rien une entrave ou un doute à la pertinence du transport ou du bon fonctionnement, l'interprétation est au contraire le fondement de la pratique mathématique. Voilà beaucoup de mots et beaucoup d'encre pour mettre à distance les pratiques de ce qu'elles ne sont pas : une forme n'est pas un accès à ses contenus.

L'usage d'axiome manipulatoire comme l'axiome du choix dans un tel contexte, sont des pratiques non seulement pertinentes, mais nécessaires, si l'on veut encadrer la manipulation d'une « forme libre » par un formalisme rigoureux (reste à voir la condition de pertinence d'un tel désir). En effet, se donner les moyens de choisir un élément face à la liberté ambiante est un mécanisme plus qu'utile pour raisonner dans un contexte de liberté. Aucune fonction de choix ne pourra exister là où aucun accès à un contenu n'est pas donné (pensons à la recherche de la fonction de choix sur R…) ; mais se donner les moyens manipulatoires d'un accès est une pratique primordiale dans l'étude des formes libres.

De là vient la nécessaire relativisation de toutes les critiques que nous avons effectué sur les mathématiques classiques. Ces critiques sont nés de notre recherche d'un fond à la pratique mathématique. Dans l'observation des pratiques mathématiques issue des théories formelles classiques, on s'est heurté à un décalage important entre la nature des pratiques et les concepts du formalisme. La critique concerne donc le regard induit par les concepts plutôt que la pertinence des pratiques. Regard qui a malgré tout induit un certains nombre d'affirmations non pertinentes, d'objet dont la réification naturelle est relativement non pertinente. On peut dire qu'il y a plusieurs mathématiques. Vouloir tout réduire à un monde unique qui concentre beaucoup de concepts « en une fois » a produit beaucoup d'illusion sémantique. Prendre de la distance, disséquer les concepts en jeux peut apporter une lucidité appréciable sur la nature des objets manipulés. La césure liberté-accès que j'ai aussi nommé forme-objet est un contour important de cette volonté d'objectivité.

Dès le principe élémentaire de neutralité de la cellule, il existe la possibilité d'interprétation (on peut utiliser les schémas pour parler de tout ce qu'on veut). Il s'agit de liberté. S'en priver ferait perdre toute pertinence aux mathématiques. Il y a de la place pour la liberté à tant de niveaux en mathématiques. Le fait de parler « en

général », de « tous les possible à la fois » est au cœur de la puissance des mathématiques qui concentre « tous en un seul». Le mécanisme de la variable est d'une efficacité redoutable. La gestion de la liberté par la définition d'une forme est d'une grande pertinence pour parler « de tous ». Les mathématiques de la contrainte (de la forme) ont un bel avenir devant elles, car elles correspondent à un besoin fondamentale, d'utilité, de pertinence et d'efficacité.

Il s'agit seulement de restreindre les formes à leur domaine : celui de la liberté. En mathématique, la liberté est le contraire de l'accès bien défini, de l'univocité. Seule l'univocité est « mathématique », le reste est interprétatif, la liberté en particulier. Mais la puissance des mathématiques vient de cette liberté interprétative immédiatement présente derrière l'univocité. Si la fiabilité des mathématiques niche dans la pratique univoque de la manipulation, elle possède cependant toute la place nécessaire pour interpréter la liberté. Comprendre cette césure, donner le relief nécessaire aux définitions pour la faire apparaitre, pratiquer des manipulations pertinente avec les objets et formes choisie (ne pas parler d'accès face à une liberté) sont les conséquences manipulatoires suggérés par ce regard qui cherche à atteindre clarté et de cohérence.

Si les mathématiques sont bien l'alliance entre les schémas et l'interprétation (interprétation univoque quand il s'agit de pratique mathématiques et non univoque pour toute sorte d'autres usage dont l'application au monde), dans ce cas les mathématiques sont le lieu de la liberté. L'interprétation univoque n'a pas d'autre limite que l'univocité, et l'interprétation non univoque ouvre à toute pratique imaginable. Mais quel intérêt y a-t-il à pratiquer les mathématiques en dehors toute règle, de tout cadre ? Tout dépend de l'usage qu'on en fait, l'art aime la liberté, l'objectivité aime la pertinence. Dans une recherche d'objectivité face monde, comme pour toute construction humaine, il existe une règle de conduite : le bon sens, la clarté. Construire un édifice formel pour les mathématiques relève d'une tentative de clarification, de pertinence et d'efficacité. L'édifice sera inévitablement teinté d'une architecture culturelle, d'une histoire, d'une croyance et d'une attente. Quand on cherche à normaliser la pratique mathématique pour la rendre utile, fiable et médiatique, il est important d'optimiser la pertinence du cadre réalisé. On est loin de l'impertinence avec le modèle classique, peut être seulement un peu proche de certaines confusions engendré par l'inévitable condensation d'information si utile par ailleurs.

Vers l'infini…

Un petit mot sur le positionnement par rapport à l'infini n'est pas superflu, car c'est, lui aussi, un concept fondamental des mathématiques. Pour apporter de la clarté à cette question, nous sommes outillés par l'idée de distinguer tout ce qui est différent. La distinction entre le texte d'un algorithme, le déroulement de son exécution, le résultat de son exécution sera à même de nous éclairé le chemin menant à l'infini mathématiques.

Processus répété

Si les idées de <successeur> <appliquée> en <boucle> à partir d'une <origine> produisent une bonne idée des nombres entiers. Il y a une différence fondamentale concernant les liens entre le procédé de formation (une simple boucle) et le schéma généré par ce procédé (une chaine linéaire non finie). On a d'un côté un algorithme très simple et fini, et de l'autre une chaine infinie avec une origine. Ainsi un algorithme très simple peut « concentrer » la notion de nombre entier infini. C'est la figure développée qui sera primordiale et représentative de l'ensemble des nombres entiers.
On peut tout de suite poser l'axe de notre réflexion : l'infini, c'est l'idée de « etcetera », de « je continue avec cette même méthode qui est univoquement bien définie ». C'est par ce simple procédé de répétition à l'identique que le fini peut engendrer l'infini, par la notion naturelle de « et ainsi de suite». Si le procédé est bien défini, le « ainsi de suite » donne naissance à l'infini.

Mon approche n'est pas ultra-finitiste, parce que l'infini possède bien une place. Le « etcetera » est un concept primordial bien que non univoque sous certains aspects. Il est « la répétition univoque d'un mécanisme univoque », mais le mot « répétition » n'est pas univoque. Rien d'univoque ne nous parle de l'idée « d'infini » ou même de « je continue ainsi ». Si le lien entre l'algorithme et son résultat est univoque, il reste un fond de perception non univoque dans l'infini, et c'est justement l'idée de ne pas être fini.

L'utilisation de l'infini, formalisé par une définition finie, est un procédé de condensation de l'information qui produit donc une perte 'controlée' de l'univocité. En effet, en disant une seule fois quelque chose qui doit se répéter, on a pas dit chacune des étapes en détail, mais pour une définition bien formée, on en détient la possibilité, d'où l'idée de contrôle de l'univocité. C'est condensation est indispensable à la force d'expression des mathématiques. Sans concentration de l'information, point de force dans une observation. La multiplicité des réalités sous-jacentes à une seule phrase lui confère sa grande force, son pouvoir expressif, la pertinence.

L'univocité linéaire

Dans le cadre de l'étude de l'infini, il est intéressant de poser la question de l'accès complet aux structures bien définies. Si face à une forme libre, on cherche à produire un accès univoque à des représentants possibles, le fin mot de la manipulation univoque est la production d'une manipulation pas à pas. La manipulation pas à pas correspond à la pratique humaine d'« une seule idée à la fois » et la pratique sémantique d'un lien de plus à chaque étape. L'homme ne pense qu'à une seule chose à la fois, contrairement à

la nature exécutant des myriades de choses distinctes « en même temps » (dans le regard naïf non éclairé par la relativité spatio-temporelle). Il possède une seule tête de lecture. Et pour avoir une fiabilité à dimension humaine, on peut imposer cette exigence de linéarité en demandant aux mathématiques de réduire toute ses pratique à la dimension du parcours connexe. C'est une contrainte très forte qui rejette l'idée de forme, de choix et de liberté. C'est une idée très lourde qui ampute la perception des concepts abstrait avec le recul qui leur convient. Ce recul sémantique est troqué contre un parcours « nez dans le guidon » d'une application pas à pas. Cela conduit à une mathématique dont l'expressivité est limité puisque très contraintes. Mais d'un autre côté, elle est la traduction univoque de l'interprétation naturelle portée par ces concepts abstrait.

Le parcours pas à pas est une ressource linéaire. Si un unique parcours doit produire l'accès au représentant désiré, il faut partager cette ressource linéaire pour construire à la fois l'arbre donnant accès à chaque représentant et tous les liens nécessaires à la définition interne de chacun des représentants. On a un bon exemple de ce partage de ressource dans la programmation multitâche car sur un ordinateur à processeur unique le programme central doit être effectué pas à pas (une modification de mémoire à la fois). On a un autre exemple dans le cadre posé par les machines de Turing. Il ne s'agit pas de soumettre les mathématiques à la notion de calcul, mais de construire le sens pas à pas. En effet les mathématiques dépassent le calcul par la notion d'interprétation. Qui rend possible la manipulation de beaucoup en une fois, qui rend possible la construction de cadre de manipulation (en pratique calculatoire, le cadre doit déjà être posé), la possibilité de voir autre chose que ce qui est écrit. Le calcul vu dans on extrémité est neutre de tout sens. Les mathématiques véhiculent un sens interprétatif. Ce qui n'empêche pas de s'interroger sur la possibilité d'une recherche de définition pas à pas complète (sans envisager son exécution : nous somme un cran interprétatif au dessus du calcul) qui est la seule définition effective d'un objet complet.

La pratique linéaire de soumettre toute réalité à un parcours unique se pose dans de nombreuses situation : face à la construction d'objet, face à la démonstration d'une proposition, face à la linéarisation des alternances de quantificateur, etc. En effet ce cadre nous donne une bonne idée de la nature de l'imbrication des « etcetera ». Il est courant d'appeler « complexité des mathématiques » l'alternance des quantificateurs logiques. Et bien c'est dans leur linéarisation que l'on rend compte de cette complexité réelle. Cette linéarisation n'est possible que face à des objets discrets. Nous verrons que les autres ne posent pas de problèmes. Des définitions en boucles de etcetera imbriqués sont traduisibles en arbres combinatoires. Pour linéariser un tel parcours, il faut choisir un ordre de parcours de ces arbres. Cela pose le problème du choix d'un parcours complet parmi tous les choix possibles, cela à conduit à des définitions dépendantes du parcours d'accès… cette singularisation des arbres combinatoire est le seul moyen de construire une univocité linéaire. C'est dans cette obligation de choix singulier que l'on prend conscience de l'abstraction des objets courant loin au dessus de l'univocité. Les définitions « toute en une fois » avait la puissance de produire des concepts abstraits indépendants des parcours de démonstration et de manipulation. On distingue dans ces quelques mots comment le parcours connexe (on peut penser à

celui d'un ordinateur parmi ses sous programmes) rend les idées de complexité fondamentale à la compréhension des structures mathématiques.

On peut même établir un parallèle entre la notion de parcours connexe et la notion complétude d'un système logique. Les descriptions complète (les langages complets, la complétude), sont les objets connexes dont on peut linéariser le parcours (en général on se contente d'une définition récursive). Quand on manipule des objets non connexe (comme des formes libres dont on a pas définis un accès complet à chacun de ses éléments), il n'est pas possible de produire des démonstrations de complétude lorsqu'on a besoin du contenu des éléments de cette liberté, étant donné qu'il n'ont pas été défini. Face à certaine situation, comme nous le montre la diagonale de Cantor, c'est impossible, on ne peut pas produire de parcours complet sur une liberté infiniment répété.

Finitisme

En tentant de débrouiller cette notion d'infini, on côtoie de nombreux concept :

- le passage d'un énoncé fini à une réalité infini par un procédé interprétatif,
- la notion de répétition non finie,
- la notion de forme libre (non univoque) qui parle d'infinis possibles sans les nommer individuellement,
- la notion d'accès complet,
- la notion de parcours unique pour une univocité maximale à dimension humaine,
- la notion d'imbrication de plusieurs boucles de etcetera à développer (de plusieurs infinis), …
- …

La rupture entre accès complet et forme libre est importante pour distinguer deux sortes d'infinis, l'un est sous entendu, l'autre est explicite. C'est le dilemme permanent entre concentration de l'information et recherche d'univocité.

Mais l'infini se complique bien davantage quand on envisage des situations hybrides : des boucles d'accès imbriqués au dessus de formes libres, elles-mêmes au dessus de boucles imbriquées, etc.

Si un manipule des objets libres (sans accès explicite au contenu), tant qu'on ne manipule pas des contenus illicites (comme dans la situation de la diagonale de Cantor), on peut estimer que l'accès à « l'objet forme » est complet face aux besoins de manipulation. Cette manipulation univoque d'« objets libres » parle tout simplement d'une structure abstraite « supérieure ». C'est l'interprétation de cette réalité abstraite qui donne lieu à des manipulations d'une réalité incarnée, « inférieure » dans le sens de l'accès aux singularités. Cette pratique qui consiste à séparer ce qui est distinct, nous ouvre les portes de la manipulation univoque des « objets libres », mais il faut être conscient du statut de ces objets manipulés. La manipulation est univoque quand on la prive de son interprétation naturelle qui consiste à voir les formes comme porteurs de contenus. La pratique classique ne prend pas ces précautions, bon nombre de manipulations théorique font usage de contenus à l'intérieur de forme libre dont l'accès

n'est pas défini. Dans ce cas je parlerai de manipulation théorique, non univoque et déconnectée d'une réalité accessible. On a toute liberté interprétative en mathématique, ces pratiques sont possibles et ne pose pas de problème particulier (tant qu'on respecte l'ordre de construction du sens), mais il faut être conscient de la nature déconnectée de telles manipulations.

Dans mon optique de ne considérer comme réel que ce qui est explicite, on peut entrevoir que les affirmations explicite et univoque repose sur la notion de liens effectifs, c'est cette nature connexioniste (lien explicite ou non) qui me semble fonder les mathématiques univoques, le reste est de nature interprétative. Ce qui fausse la donne, c'est la possibilité de prolonger la structure d'un contexte supérieur libre en un contexte inférieure explicite. Cela donne l'impression que le contexte supérieure parlait « effectivement » du contexte inférieure. Mon regard consiste à dire qu'on ne dit rien de plus que ce qui est effectivement dit. Autrement dit, une interprétation n'est pas de la même nature qu'un lien explicite.

Mon approche est très « finitiste ». Et d'autant plus que toute définition issue d'un cadre mathématique univoque s'expose forcément dans un langage fini à l'origine (en pratique c'est toujours fini, mais pas toujours dans un cadre univoque dès l'origine). Je constate que tout objet infini provient d'une « interprétation » à partir d'un objet fini. Et l'objet à considérer, dans ce cas, est le langage de définition. La distinction (habituellement passée sous silence) entre la définition et son déploiement permet de faire le lien effectif entre l'infini et le fini. Ainsi l'accès et la manipulation de l'infini repose sur des pratiques univoques et finies. On peut même aller plus loin ; le concept essentiel permettant le passage à l'infini est l'idée de« etcetera » ; il n'est pas de nature univoque, il parle forcément par sous-entendu, il est de nature interprétative non univoque parce qu'on ne produit jamais effectivement le déroulement des répétitions, on se contente de les définir (sauf dans un ordinateur éventuellement). Vu sous cet angle, la manipulation de l'infini est de nature interprétative, et c'est évidemment le cas. De l'autre côté, cette idée d'infini parle du monde et des pratiques humaines de façon simple; aussi est-il pertinent de le nommer (et donc d'interpréter).

Il m'importe de parler de l'accès à l'infini. Je voulais mettre en évidence que l'accès à l'infini a besoin d'une nature connexionniste pour être « effectif » (bien qu'il ne le soit toujours qu'interprétativement). Sans cette réalité connexionniste, l'interprétation est de nature sémantique et non de nature univoque. Le leitmotiv de la séparation entre ce qui connexion et ce qui ne l'est pas me semble agir en faveur de la clarté : la nature des infinis en jeu me semble bien distinctes alors que la pratique classique les confond.

Certains langages, certains cadres de manipulations mathématiques laissent voir davantage ces liens schématiques, ces « connexions » que d'autres systèmes plus opaques. La machine de Turing ou les contextes algorithmiques les rend clairs, alors que la sémantique engendrée par les systèmes formels standards est peu propice à la perception de ces accès. On s'y exprime face à « tous les possibles ». Quand on observe une contrainte du langage formel comme une définition, le concept frégéen « quelque soit x» est très proche de mon idée d'une « cellule vide ». Ces mots ne disent rien d'autre que «voici une variable que je nomme on pourra l'interpréter par des contenu dont on ne dit rien ici». Quand une telle définition décrit une forme libre, la

notion de « quelque soit » est vide de ces possible qu'on imagine. S'il fallait donner des valeurs à ces variables, un contexte univoque réclamerait un procédé de définition supplémentaire permettant l'accès à ces différentes valeurs. Il faut une définition supplémentaire pour que le non-constructif (la forme) se transforme en constructif (une structure déployée univoquement définie).
Les contraintes des systèmes formelles classiques sont ainsi des objets finis a part entière ; les liens décrits par une forme sont finis. C'est leur extension à la totalité (qui reste à définir) qui les rend infinis. Toute infinité est l'interprétation d'une réalité finie: une définition, un schéma, un algorithme,… qui se doit d'être univoque.

Je ne défends pas la nécessité de définir systématiquement des accès complet (on est libre d'apporter le niveau d'information que l'on veut), mais je défends la pertinence d'une lucidité face aux liens explicitement définis. La notion de « forme libre » présente bien des vertus dont celle de la condensation de l'information. Il est fréquent et utile de pouvoir définir un objet sur plusieurs réalités « non connexes ». Par exemple par l'utilisation de l'axiome du choix où l'élément existant n'est pas tiré d'un parcours continu sur un accès bien défini, mais d'une affirmation ad hoc assumée. La preuve de cette pertinence est que les mathématiques classiques servent de guide aux mathématiques constructivistes par leur efficacité à « construire abstraitement » ce dont le mathématicien constructif s'attelle à « compléter » l'accès.
Les objets imbriquant plusieurs infinités l'une dans l'autre (à quantificateur alternée sur des variables non explicités) sont des objets non-manipulables tant que les liens interne de ces dépendances multiples ne sont pas tissés. Ces imbrications sont la source de la non-linéarité, de la complexité. On ne peut « réduire » de tels objets à la seule présentation de leur forme libre. La complétude (la possibilité de décrire tous les liens) demande, nécessite la description de la complexité réelle de ces liens. Et il n'y a pas unicité de parcours de cette complexité source de destruction de l'univocité de l'abstraction.

Complexités cumulées

Montrons ici que la notion d'infini est très liée à la notion de complexité. Observons cela dans les mathématiques classiques fondées sur l'utilisation de contraintes formelles définie par des quantifications « quelque soit » et « il existe » alternés. Imaginons un instant que chaque contrainte soit traduisible sous forme de « liens » entre des variables (dans le cadre de la théorie des ensembles naïve, c'est assez clair avec l'appartenance). Imaginons de plus que l'on transforme chaque affirmation générale sur les variables en un parcours linéaire et organisé ayant accès à chaque contenu possible pour ces variables pour chaque contrainte de dépendance possible. Cela produirait une univocité fondamentale de l'affirmation. Et bien cette pratique a pour effet de rendre compte de la complexité. En effet en parcourant toutes la structure lien par liens on ne laisse rien sous forme d'une interprétation. Cela n'est possible que face à des objets complets, bien sûr.

L'idée de complexité est donnés par une abondance de liens qui ne peut être réduit par une description simple. Le mode de définition des mathématiques classique nous invite à regarder la complexité comme issue du déploiement de boucles imbriquée énonçant des contraintes de liaisons. Pour clarifier les choses, il faut commencer par répondre à

la question suivante : si l'on peut définir la complexité par une simple contrainte, s'agit-il vraiment de complexité ? La définition elle-même ne rend pas compte de la complexité des objets à déployer. C'est pourquoi on peut parler d'une réelle complexité, les liens effectifs sont très complexe, seul un mode d'accès au lien est rendu par la définition. On se rend compte de la complexité des structures quand il s'agit de résoudre une contrainte ancrée dans ces liens. Cela montre, encore une fois, l'importance de la dissociation entre définition et objets construit. Cette scission rend la définition de complexité cohérente.

La complexité nait de l'imbrication de boucle. Il suffit d'entrevoir l'existence d'un « etcetera » (une boucle non limité) pour que cette complexité possède une taille infinie. Quand plusieurs « etcetera » sont imbriqués (à partir de deux), on a les moyens de définir une complexité immense. C'est l'origine de la non-linéarité qui produit des complexités dont le déploiement est très vite inaccessible à la description. La définition ne suffit pas à pénétrer dans ce monde non-linéaire, il faut interpréter la définition et manipuler les boucles.

Nous allons observer les moyens de définitions qui engendrent ces liens complexes. Pour mettre en évidence cette complexité notre objectif est de la réduire à un unique parcours linéaire :

- La complexité est engendrée par des **quantificateurs alternés** au dessus d'une contrainte. Mettre à jour tous les liens effectifs d'objets complets définit par des propositions formelles, il faut redonner le relief perdu par toutes les concentrations d'informations. En regardant les phrases sous forme prénexe, on peut séparer la quantification préalable à gauche, de la contrainte elle-même à droite. Pour parvenir à un parcours complet des liens, il faut commencer par construire pour chaque quantificateur un parcours explicite de la liste des objets qu'il quantifie. L'alternance de quantificateur peut être vue comme une imbrication de boucles où chacune parcours sa propre liste d'objet. Si les boucles ne sont pas limitées (infinies), le parcours linéaire de l'imbrication des boucles impose de faire un choix parmi les parcours possible. Chaque quantificateur peut être vue comme une « répétition» de l'objet suivant (on sous entend qu'ils sont accessibles en liste pour l'instant). Quant à la contrainte commune, elle exprime, à chaque étape de parcours, au cœur de toutes ces boucles, les liens définis entre ces objets parcourus. Le résultat est le tissage d'un schéma pouvant engendrer une complexité immense. L'idée que les motifs peuvent être dépendants de chaque étape donne la mesure de cette immense complexité.
- La complexité des **types d'objets** manipulés par les quantificateurs peut être très variable. Nous n'avons pas parlé de la nature des objets d'une liste en supposant qu'on y avait accès de façon linéaire. Mais il peut en être autrement si la quantification est typée. Si un quantificateur s'adresse à un type d'objet d'une nature complexe, le parcours de la liste des objets devra suivre le parcours d'accès complet à ces objets : il faut un parcours de toutes les définitions possible. C'est parfois très complexe est non-linéaire. En fait, le type d'un objet peut être lui-même d'une complexe non limitable. Par exemple la notion de « forme libre » rend impossible un tel parcours complet, car conformément au raisonnement diagonal de Cantor on peut

construire de nouvel objet au dessus de tout parcours explicite. Ainsi la notion de parcours discrimine les types d'objets entre le bien défini (l'accès complet) et le non définit (les formes avec une infinité de choix, que l'on appelle souvent le non-dénombrable). Cette distinction n'ayant pas été faite au niveau du symbolisme classique, on assimile à une seule réalité ces deux natures très différentes de définition ; c'est source de paradoxes et d'imagination interprétative (à moins que ce ne soit plus simplement de confusion). Dans ma perspective, une « forme libre » (même finie) ne décrit aucun accès et donc la quantification sur une forme est vide de parcours. Ce n'est que le lieu d'une liberté interprétative (qu'il est possible de quantifier à partir du moment où on définit un accès explicite). Hormis cette mis à l'écart des formes libres, il est possible d'envisager des types d'objets de toutes les complexités possibles ; parce qu'on peut toujours désigner par un nom (par un type) n'importe quel construction.

Pour s'en donner une idée, pensons aux Réels écrit en 'décimales' binaires. Ce type est une forme libre, on peut remplir une suite de 0 et 1 avec tous les choix possibles d'algorithmes de définition possibles imbriqués. On dispose conformément à Cantor d'une complexité renouvelable à chaque étape et sans limite. Face à ce discours que penser de la quantification sur les réels : les réels ne sont qu'une forme, seule une définition explicite (et donc limité) peut donner un accès univoque à cette forme. Une définition unique comme celle de pi ou du nombre d'Euler, ou encore une définition multiple comme les nombres rationnels ou algébriques. La quantification sur une forme libre est vide tant qu'on n'a pas défini d'accès. Le non-dénombrable ne dit pas plus de choses qu'un accès qui serait limité, au contraire comme tout les sages c'est en ne disant rien parait en dire plus. Et l'on entrevoit ici l'immense possibilité de construction d'une complexité illimité (bien que forcément incomplète). Quand on quantifie sur les réels, on ne dit forcément rien d'intéressant : soit on ne dit rien, soit on en dit trop peu.Quand ces objets quantifier sont une forme infiniment libre (comme les réels ou les parties de N), on a le problème irréductible de l'impossibilité d'accès linéaire au contenu. Quand il s'agit d'un objet complètement accessible, on cumule les complexités de la définition des objets et de l'alternance alternance des quantifications. Et l'on entrevoir que dans une telle situation, il suffit d'expliciter l'objet par des quantificateurs pour se rapporter à une situation sans typage. Le type d'un objet peut être vu comme la simple concentration d'une alternance de quantification.

- Les **primitives** utilisée dans le langage sont aussi une source de complexité. Une primitive est un symbole qui exprime un concept, un algorithme, une interprétation, une action sur les objets quantifié. Par l'interprétation quelle impose, une primitive peut cacher une complexité non explicité. Par exemple si dans une même contrainte on fait intervenir le symbole de multiplication et d'addition, le fonctionnement dépendant de ces primitives sous-entend un rapport de relation complexe non exprimé : la multiplication cache des boucles d'additions dépendantes. Ainsi une primitive peut « cacher » une grande complexité. Quand elles font référence à de manipulations univoques réductibles en un parcours linéaire, les primitives sont aussi le lieu de concentration d'une complexité qui peut être importante (pensons à la puissance par exemple).

Maintenant il ne faut pas croire que l'imbrication de boucle produit systématiquement la complexité, c'es la contrainte au cœur de cette imbrication qui en est l'artisant. Chacune de ces complexités peut être transparente, réduite à néant, si les liens tissés ne décrivent pas une structure profondément liée. Ainsi de nombreuses boucles imbriquées peuvent produire un objet linéaire ou même fini. On peut parler de façon complexe de chose très simple. On découvre ainsi une subjectivité important dans la notion de complexité. Un objet étant définit pas ses liens, un seul lien change la nature de la structure en jeu. Et l'on voit apparaitre de façon ténue, que la complexité n'a pas de graduation, ni de typologie. Les typologies ne concerne que le mode de définitions, alors que la complexité est celle de l'objet déployé. Le nombre de boucles imbriquées présenté ici comme génératrice de la complexité ne parle que d'une borne de la complexité possible et pas d'une complexité réelle.

On peut justement voir les nombres Transfinis comme une description de ces bornes de complexité. Ou plutôt : l'usage pratique qui est fait des nombres transfinis consiste à poser des bornes de complexité dans un raisonnement. Raisonnement que l'on pourrait établir sans parler d'infinis. La difficulté de l'usage des transfinis réside dans la non-distinction de toutes les complexités présentes, en particulier dans la manipulation des « formes infiniment libres » dont la complexité n'est pas définie… ni définissable.

Par ces concepts, on peut se faire une petite idée de la complexité de la notion d'infinité et de l'infinité de la notion de complexité. C'est le mode de définition qui la génère. Nous n'avons présenté la question que dans le cadre des contraintes formelles.

Brève théorie du langage

Puisque nous nous apprêtons à étudier le théorème de Gödel qui repose sur l'étude approfondie d'un système formel, il est utile d'avoir une certaine perspective de la pratique du langage. Il est assez fréquent dans parmi les philosophes de considérer les langages mathématiques formels comme modèles du langage ordinaire et la logique formelle comme modèle de la vérité. Je pense au contraire qu'il existe une grande rupture entre le langage mathématique et le langage ordinaire, bien que reposant les deux sur le même processus symbolique. Etablir cette différence de perception constitue le but de ce chapitre.

Je propose une approche générale de la question du langage afin de situer les spécificités du langage formel face au langage ordinaire. Cela apportera des précisions sur la notion d'interprétation. On y trouvera une idée du rapport qu'entretiennent les objets mathématiques avec le monde naturel. Il me semble que cette théorie est aussi d'une utilité non négligeable pour constituer une césure entre les phrases formelles et leur interprétation dans le monde. On commencera par étudier le langage ordinaire et les processus communs à tous les langages, pour finir brièvement par un positionnement du langage formel.

La lecture, en annexe, du résumé d'une théorie de la pensée pourra aider dans la compréhension de ce qui va suivre parce qu'elle en est le fondement.

Question de langage

Qu'est-ce que le langage ? Quels en sont les rouages, l'essence, la nature.

Il existe un certain nombre de questions profondes sur la nature du langage. Comment le langage peut-il se construire en nous ? Quel mécanisme, quelle relation existe-t-il entre le langage et la réalité extérieure ? Quel mécanisme, quelle relation existe-t-il entre le langage et la pensée ? Quel mécanisme, quelle relation existe-t-il entre le langage, la connaissance et la mémoire ? Les mots sont-ils l'expression d'une réalité mentale ou forment-il une réalité indépendante ? Les mots sont-ils directement liés à notre perception des choses ? A quoi et comment les mots font-il référence à quelque chose d'autre qu'eux ? Font-ils référence à des idées mentales bien différentes des mots ou bien aux réalités extérieures ; ou bien aux deux, mais comment alors ? Les mots expriment-t-ils la totalité du ressenti ou bien sont-il l'expression réduite d'un ressenti psychique ? Le langage est-il la face visible et révélatrice d'un mécanisme mental caché dont il est la bonne reproduction ou bien au contraire existe-t-il une immense distance entre le mécanisme du langage et le mécanisme mental ? Comment s'organise la perception des mots et quelle est la nature du sens produit en nous par les mots ? Que signifie « comprendre une phrase » ? Quel est l'influence contextuelle du discours sur les mots du discours ? Quelle est l'influence du contexte général sur les mots ? Comment se peut-il qu'en nous exprimant, nous formions automatiquement des mots organisés selon une structure grammaticale et syntaxique complexe, sans avoir aucunement à réfléchir à la constitution de ces structures ? Faudrait-il alors une précision infinie pour exprimer la signification précise de l'intention sémantique du

locuteur? Comment se peut-il qu'on puisse exprimer des choses hypothétiques sur le monde ? Comment se peut-il qu'on puisse juger de la vérité de phrase du langage ? Le langage est-il séparé du monde par la possibilité de s'exprimer sur lui en vérité et en erreur ? Mais alors comment reproduit-il le monde s'il peut se tromper sur lui ? Le langage parle-t-il vraiment des faits extérieurs ? Qu'est-ce qui dans le langage fait référence aux réalités les plus enracinées dans le monde (les réalités matérielles par exemple) ? Existe-t-il des concepts du langage qui ne possèdent pas leur source dans le monde extérieur à nous? Selon quels principes alors ?

De façon assez naturelle, le langage est vu comme la traduction de nos pensées qui sont peut-être plus riches, plus fines, plus complexes que les mots. Mais comment pourrait-on exprimer des pensées autrement que par le langage ? Les mathématiques sont venues jeter un pavé dans la marre avec la découverte du langage formel. La logique mathématique et le langage qui l'accompagne semble tellement indépendant du locuteur. Comment pourrait-on songer que le langage mathématique soit d'une autre nature que le langage naturel ? Ils sont tous les deux entremêlés, fondés sur la même base, complètement en interaction. Aussi le langage de la logique formelle a servi de paradigme au langage naturel. Sa relative simplicité, sa structure rigoureuse, ses mécanismes de la signification qui semblent beaucoup plus accessibles que dans le langage naturel, son efficacité à parler vrai du monde ; voilà tant d'indices qui incitent à voir le langage mathématique formel comme un accès simplifié et rigoureux au monde. Il nous révèlerait les fondements de la réalité du langage. La complexité des réalités exprimées et l'usage non rigoureux des règles fondamentales du langage seraient la cause du détournement du mécanisme central. L'usage d'un langage fondamental peut débrouiller les concepts basiques. C'était du moins l'espoir né de ces découvertes trouvant une caricature dans le Tractatus Philosophicus.
A l'inverse, on peut au contraire croire que le langage mathématique n'est qu'un produit fabriqué sur mesure pour exprimer une réalité à part. Mais alors faut-il croire que l'univocité qui apparait dans le langage mathématique n'est qu'une apparence fausse ? Le langage mathématique serait-il soumis à la même subjectivité que tout autre langage ? Et les questions du langage se posent de la même façon pour le langage mathématique que pour le langage naturel : ce sont les questions de la référence, de la signification, de la compréhension, de son indépendance, de sa relation avec le monde et la pensée.

Origine

Bien que le langage mathématique soit très éloigné du langage naturel, comme nous le proposerons, il est utile de commencer par une explication du langage naturel. C'est en effet sur le langage naturel que repose le langage mathématique. Et les fondements naturels du langage formel sont le lieu de beaucoup de subjectivité dont il est bon d'avoir conscience.

La théorie de la pensée (voir en annexe) propose une direction engagée face au faisceau de questions présentées ci-dessus. En vertu de cette théorie, nos pensées sont à chaque fois nouvelles, chaque concept utilisé se modifie sans cesse. A chaque instant, la conscience est une nouvelle cellule de sens liée avec d'autres pensées (et/ou d'autres sensations nerveuses). Le monde de la pensée est donc beaucoup plus riche que le langage ; sans cesse renouvelé, modifié à chaque instant. Le sens ressenti est

une accumulation synthétisé de toute une expérience que des mots ne peuvent pas rendre. Depuis la jeunesse s'accumulent des millions d'informations issues de la vision, l'ouïe, le toucher, les apprentissages éducatifs, les événements, les observations comportementales, sociales, les concepts théoriques, etc.). Les racines profondes d'un concept sont d'une variété et d'une richesse insondable. Chaque concept est relié à d'autres concepts riches de cette immense expérience.

Si l'on s'interroge sur la perception des mots qui nous sont communiqués, on peut dire que le langage perçu est lui-aussi enrichi de notre expérience. Le contexte (les perceptions récemment activées) dirige la perception des mots vers la cellule précédemment ressentie, la plus proche des stimulations sensorielles et du contexte. Ainsi la perception est systématiquement enrichit de toute une histoire passée et du contexte en cours.

Cette théorie du langage a pour effet de déchoir l'immense mystère du langage en le réduisant à un simple espace structuré de désignation contextué (le mystère existe toujours, mais il est déplacé vers la nature humaine, vers la physiologie, vers l'interaction entre le milieu extérieur et intérieur, qui structure l'individu à partir de concepts hautement abstraits). Le langage repose sur des codes multiples et structurés, sur des références mobiles ; autant à la compréhension qu'à l'expression.

Le langage s'acquiert de façon beaucoup plus profonde que les seuls mots. Les intonations, l'accent, l'importance du contexte, la réactivité, les modes du discours, l'accompagnement du corps (notamment faciale), etc… sont autant de moyens de véhiculer du sens. Beaucoup d'éléments de nature non verbale prennent part au « langage ». Cela dit, le langage réduit à l'écrit nous montre que les seuls mots possèdent déjà une très grande puissance expressive. Si l'on était seulement un « intellectuel », on pourrait dire qu'il y a déjà l'essentiel du sens dans le seul verbe.

Les mots s'acquièrent dans la petite enfance par prise de possession de son corps (articulation), par réactivité de l'entourage, puis par la somme des expériences accompagnées de mots qui connectent de façon très neutre la verbalisation aux objets, aux événements et aux schémas de toutes sortes. Si les schémas de perception se structurent automatiquement par le mécanisme de synthèse, il en est de même pour les schémas du langage. (On connait les fautes grammaticales des enfants qui manipulent des règles non adaptées. Les mots utilisés pour des sens inattendus car influencés par le contexte d'apprentissage). Par association d'idées, par reconnaissance et synthèse, les mots vont se lier aux choses matérielles, aux émotions, aux situations, aux méthodes, puis aux mots eux-mêmes ; autant dans la structure des mots entre eux (grammaire et syntaxe) que dans le sens conceptuel que les mots entretiennent entre eux. Toutes ces structurations sont automatiques, elles sont établies de proche en proche. L'acquisition ne procède pas d'une démarche logique consciente, mais d'un mécanisme interne inconscient (par le mécanisme que je nomme la Synthèse, par le mécanisme de la gestion automatique de la mémoire, etc…).

Toutes les similarités sont systématiquement reconnues, associées puis synthétisées. On peut même aller plus loin en disant que seules les choses déjà connues peuvent être perçues. La perception ne peut ressentir qu'un seul pas au delà de ce qui est déjà

perçu. Toute perception est une agrégation de quelques concepts précédemment reconnus. Les concepts différents se trouvent automatiquement séparées parce qu'ils ne reposent pas sur les mêmes reconnaissances.

La perception d'un objet est un mécanisme de flux dirigé automatiquement par les connections acquises qui sont en quantité gigantesque vers les cellules formant la reconnaissance du milieu. La reconnaissance est orientée par la résonnance contextuelle. Les mots comme désignateurs de concepts sont acquis au départ par simple association d'idée. Il faudrait ensuite détailler le mécanisme de l'action (cf. théorie de la pensée) pour comprendre comment les mots vont trouver leur sens par affinements successifs dans la confrontation aux succès (la satisfaction des attentes) et de l'échec (leur non satisfaction). Les mots simples vont « capturer » les concepts sensitifs selon plusieurs mécanismes dont voici l'un des plus primitifs : quand mot et sensation visuelle abstraite sont perçu en commun, des celulles vont abstraite vont unir ces deux concepts. Si la chose est répétée, une abstraction plus solide et plus riche aura lieu au dessus de cette union. Une écoute ultérieur du mot seul produira la stimulation de ces cellules supérieur (comme aurait pu le faire la stimulation visuelle seule). Ainsi est né le symbole qui peut désigné une sensation, un concept, une abstraction un objet. Le mot peut donc se lier à une perception immense historiquement accumulée. Evidemment, cette description n'est qu'une caricature. Puis parvenus à un niveau d'abstraction supérieure, des mécanismes d'acquisition plus formels vont prendre place.

Les mécanismes de structuration de la perception par production de nouveaux concepts se produisent jusqu'à saturation : quand un schéma extérieur perçu ne construit quasiment plus de différentiation conceptuelle, quand toute la perception du schéma est quasiment reconnue, à ce stade est constituée une « lecture identifiée » de l'objet. C'est la saturation de la connaissance face à l'objet (toujours susceptible de s'élargir face à de nouvelles expérimentations, de nouveaux rapprochements). Quand l'essentiel des 'réalités' du milieu ambiant sont identifiées, on peut dire que l'individu à acquis une « lecture du monde » constituée. Il ne s'agit là que d'un vague point de vue théorique pour comprendre l'idée de saturation, car en pratique il y a toujours de la nouveauté à percevoir, mais pas dans les mêmes proportions face aux déjà connu. On a rarement des souvenir antérieure à 3 ou 4 ans (et même un peu plus). Une explication de ce phénomène pourrait justement être que la mémoire ne peut se fixer qu'à partir du moment où les « concepts de lecture du monde» sont 'saturés' et donc eux-mêmes fixés pour toute la suite. Tant que les concepts sous-jacents évoluent, ils disparaissent plus facilement (ils ne sont plus la cellule de convergence). Et les stimulations nouvelles saturées selon une nouvelle structure peinent à se diriger vers ces mémoires qui se trouvent ainsi cachées et se dégradent sous une faible stimulation.

Pour être utilisés activement dans la parole, les mots ont besoin de bien plus que le mécanisme de perception, c'est tout un environnement psychologique, sociale, émotionnel,… qui doit être constitué et qui construit les influences nécessaire à l'usage (et influente à la perception).

Jusqu'ici nous avons décrit une perception « instinctive » du monde et des mots qui deviennent automatiquement des désignateurs par associations d'idée et

reconnaissance. Mais il faut ajouter un autre mécanisme d'acquisition, une autre caricature : l'apprentissage raisonné. A partir du moment où ces fondements intuitifs offrent une perception assez vaste du monde, à partir du moment où les mécanismes symboliques ont atteint un niveau suffisamment abstrait pour gagner une autonomie vis à vis de la seule perception ressentie, un apprentissage raisonné et conscient peut se greffer. Au-dessus de ces concepts automatiquement acquis, de nouveaux liens proposés par des analogies artificielles (éducatives) peuvent se structurer. Ces concepts au lieu de puiser leur source dans la reconnaissance extérieure intuitive vont se construire au dessus de la mise en relation « artificielle » de concepts abstraits manipulés par l'éducateur. Les concepts choisis par l'éducateur doivent être préalablement reconnaissables par l'individu. Mais ils sont associés selon une structure librement décidé par l'éducateur. Les mots forment typiquement de tels concepts libres. Ils sont un levier fondamental de la construction libre, de l'éducation. Les mots permettent d'associer librement tous les concepts bien identifiés.
Les mémoires non-sollicitées (consciemment ou non) se détruisent, ainsi les associations formées par l'apprentissage demeurent à la hauteur de leur pertinence (de leur pouvoir synthétique), de leur émotivité, de leur résonnance dans le monde naturel, etc….
On se limitera à cette présentation sommaire de la perception et de l'origine du langage pour donner un angle de vue déjà bien engagé.

Quelle mentalité ?

Largeur Sémantique

Cherchons dans notre modèle de la pensée où se trouve les mots. A quelles cellules sont-ils reliés ? Et quelle est la nature des sensations mentales ressenties par la perception d'un mot. Le modèle nous montre que les concepts mentaux (les cellules) qui correspondent à un unique mot sont immenses :

- Les concepts préalables - Ce sont toutes les expériences vécues qui ont été synthétisées automatiquement avant l'association du mot à des concepts. Ces concepts qui serviront de support ultérieurs à un mot ont une origine d'une richesse immense : il peuvent être de pur qualia sensorielle, il peuvent être de nature émotionnelle, expérimentale, il peuvent être des abstraction élaborées au dessus de nombreuse perceptions, etc.
- Liens entre concepts préalable et un mot - Chaque usage du mot construit des liens d'association entre le mot et ces riches concepts sous-jacents... Ces liens d'association sont multiples, un nouveau se crée à chaque fois que le mot est perçu. La structure liée à un unique mot possède autant de liaison que le mots n'a eu d'usage. Puis par le mécanisme de synthèse, par la disparition des mémoires faibles et la restructuration automatique, ces liens s'organise en pole de reconnaissance. Il existe au finale une structure immense de liens dont la forme dépend de toute l'histoire du mot.
- Influence de l'action - Quand l'individu utilise le mot (la parole, l'écrit). Cela relève du processus de l'action qui associe des mots à des perceptions par un mécanisme

d'attente-succès-échec. Cela contribue grandement à des associations privilégié du sens perceptif des mots.

- Concepts supérieurs - On a parlé des concepts sous-jacents à un mot, on peut alors parler des concepts construit au-dessus du mot. En théorie, il n'y a pas vraiment de différence car seule la chronologie existe : tout usage d'un mot construit un nouveau sens. Ce sens construit à la fois « au dessus du mot » (dès son deuxième usage) parce qu'il lie l'ancien mot à un nouveau sens, et « en dessous » parce qu'il enrichi le sens du mot qui va se constitué en une nouvelle abstraction. Maintenant dès que le sens d'un mot est stabilisé contextuellement (quand aucune abstraction synthétique ne se créé au dessus du mot au cause de la saturation) on peut dire que le sens prenant racine au dessus d'un tel concept pourra bien être vu comme « au dessus du mot ». Ces sens supérieurs capteront la compréhension du mot dès que le contexte stimulera dans cette direction. Ces concepts supérieurs sont donc liés au sens du mot. Tout ce qui est construit au dessus ou à « proximité du mot » est une connexion de sens potentiellement accessible à partir du mot (et pouvant même être ultérieurement uni à lui par le mécanisme de synthèse).
- Elasticité contextuelle - Jusqu'ici on a donné une idée la largeur sémantique d'un mot constitué. Mais il existe une autre possibilité d'élargir la valeur sémantique d'un mot donnée autre que l'usage de ce qui est déjà construit. Il suffit de lier ce mot à un contexte nouveau. Tout sens ressenti provient de l'ensemble des stimulations les plus résonnantes. Le langage n'y échappe pas, le sens global perçu par un ensemble de mot procède d'une alchimie particulière, au travers du phénomène de synthèse qui relie les sens « compatibles » (reconnaissable ensemble) des mots. Ce mécanisme a pour conséquence de fléchir le sens des mots dans des directions toutes nouvelles. Par ce principe, les mots possèdent une potentialité immense de sens. On comprend facilement qu'un mot donne du sens à une phrase, mais on trouve ici qu'une phrase donne du sens à un mot.

Stabilité, largeur et unité

Le sens, au travers du mécanisme de synthèse automatique, possède la tendance à rassembler sous une unité de sens les choses ressemblantes. Les mots sont au cœur de ce mécanisme et autant que le contexte le permet, le sens des mots se constitue par une recherche d'unité, de sens commun. Ce qui produit une sorte de visée sémantique : les mots, comme toute perception d'ailleurs, cherchent à se constituer en sémantique abstraite et stable. On trouve l'idée d'une tentative automatique de rassemblement du sens quand la sémantique sous-jacente le rend possible. Un sens stable existe pour un mot. Mais l'idée de cette stabilité est artificiellement renforcée par l'attitude rationaliste qui aime à faire entrer les choses dans des boites bien carrés, qui souhaite manipuler des référence fixes. La relative stabilité issue du mécanisme automatique d'unification sémantique a permis l'illusion de la fixité du sens, de la référence unique. A moins que ce ne soit au contraire, le désir de fixité qui ait renforcé l'impression de stabilité. Ce phénomène est accentué parce que le langage est pratiqué en communauté : on ne recherche pas seul le sens stable des mots, c'est dans la compréhension mutuelle qu'on donne crédit, force et importance au sens compatible des mots. De là est né le sentiment que les mots possèdent une sémantique fixe indépendante du locuteur ; sans parler de l'impossibilité d'une auto-analyse des structures internes.

La mémoire s'estompe, beaucoup de connexions initiales disparaissent et sont réorganisées. Le mécanisme de synthèse est utilisé en permanence. Ces constructions au dessus d'une expérience qui s'estompe forme l'abstraction. Le sens d'un mot est donc « reconstruit en permanence» par rapport à tous les concepts qui s'ajoutent sans cesse à sa proximité. Mais vis-à-vis d'un contexte donné (on ne peut jamais parler dans l'absolu), il arrive qu'une perception ne produise pas facilement de nouvelle synthèse, le sens du mot est alors saturé. Quand le contexte est assez large face à la vie, on peut dire que le mot possède un sens stable. L'existence d'un sens stable provient donc de la saturation face à l'expérience et de l'unification des sémantiques par abstraction.

Face à l'immensité des associations de sens accumulées, la compréhension d'un mot est toujours influencée par le contexte mental vers le sens abstrait le plus adapté. Le flux perceptif est « aspiré » par les cellules stimulées qu'il croise sur sa route. Cette stimulation des cellules provient de leur activation antérieure. Cette activation possède une certaine rémanence liée à de nombreux facteurs. C'est pourquoi la compréhension d'un mot est très influencé par le contexte, il possède des sens locaux bien différents de certaines de ses sémantiques plus générales. L'idée de sens général d'un mot n'est pas fondée en dehors d'une certaine stabilité face à un large contexte. Le mécanisme de convergence contextuée est de nature automatique. Dans la complexité et la quantité des relations construites, un mot à l'histoire riche à peu de chance de posséder une abstraction ultime face à tous ses usages. De tels abstractions ultimes plus locales s'organisent cependant autour de contextes richement liés et cohérents. Ces nombreuses synthèses possèdent une certaine proximité de sens (de connexion). Elles sont donc susceptibles de former des synthèses communes, si l'usage stimule le rapprochement contextuel.

Liberté

Les mots sont associés une réalité mentale large, une réalité ayant des origines variées : des objets matériels, des situations, des méthodes, des systèmes, etc. Les mots ne font pas seulement qu'exprimer une réalité mentale du langage, les mots sont liés aux choses, aux sensations perceptives, aux abstractions matérielles, aux émotions. Sachant que les mots s'exprime rarement seul, il apparait évident que les mots sont aussi abondamment liés aux autres mots (et aux structures linguistiques qui les structures). C'est particulièrement le cas des concepts raisonnés construit par apprentissage au dessus des mots (comme nous sommes en train de faire ici par exemple). Beaucoup de concepts sont construits sur les mots et sont donc directement liés aux mots. C'est là qu'ils vont posséder leur signification. De proche en proche certains mots puiseront sur d'autre réalités que les mots.

Cette organisation des mots sur les mots permet de construire des « schémas libres». Le langage donne cette autonomie de construire librement du sens en association les mots entre eux selon des schémas fabriqués de toute pièce à partir des mots. Cette liberté est d'autant plus sensible que certains de ces mots cherchent à parler du monde extérieur. Ainsi on peut construire librement des sémantiques parlant du monde. On peut se construire le monde. Ces mots « libres » peuvent être construits à partir de mots ayant un sens perceptif important. Ainsi ils peuvent influencer directement notre perception du monde. Les constructions sémantiques réalisées auront plus ou moins de

résonnance dans notre perception du monde (ou dans nos précédents concepts fait de mots). Si une résonnance existe, une synthèse automatique s'opère entre les concepts de mot et les concepts du monde (ou les anciens concepts de mots). On découvre là un mécanisme qui nous permet « d'apprendre le monde ».

Les liaisons pertinentes face au monde vont s'enraciner et éduquer notre regard du monde (qui devient automatique). De même, en liant abondamment des mots entre eux, il est possible de construire des schémas dont la résonnance est autonome : on obtient la construction de nouveau monde fondé sur des sémantiques libres et autonomes de toute résonnance « naturelle » (on peut penser à la culture).

Ce mécanisme unique, construisant notre regard sur le monde, repose sur la « liberté de construction ». Cela montre qu'il est parfois très difficile de distinguer si l'origine de la « résonnance » (qui s'organise en sentiment élaborée de « vérité », de « confiance ») d'un concept provient de chose vue dans le monde ou de construction « artificielle » issue des mots. La source de cette invisibilité est aussi la conséquence : notre perception du monde est influencée par nos schémas mentaux, constituées de beaucoup de mots. Nous réfléchissons le monde au travers de nos concepts artificiels qui ont pour conséquence d'enraciner ces concepts dans notre regard sur le monde. Notre perception du monde est très influencée par les mots, et surtout dans les hauts niveaux d'abstraction où la perception dépend des concepts acquis par les mots.

Expression

Les phrases que nous formons tentent (selon un processus automatique) d'exprimer nos pensées, mais ces pensées sont le résultat d'une multitude d'origines et possèdent des racines immensément profondes. Tout « ressenti » est systématiquement situé en des lieux immensément singuliers de notre pensée. Ces ressentis sont convertis automatiquement vers les mots et les structures de mots les plus proches de cette pensée. Ce mécanisme actif de production verbal est lui-aussi influencé par les contextes. Sans détailler le mécanisme complexe de l'action (de la théorie de la pensée), on peut dire qu'il repose sur une accumulation d'expérience, d'habitude acquise. La recherche des « bons mots » est un processus automatique qui commence par des « désirs » très abstraits (le désir « d'exprimer » une pensée). Ce désir produira la recherche, parmi les actions déjà accomplies avec succès, de l'action la plus proche de l'attente en cours. En procédant ainsi de proche en proche face à une multiplicité d'attentes générées en cascade, la meilleure « solution » sera récursivement construire en raccordant des sous-chaines d'actions de moins en moins abstraite (de plus en plus proche de l'action musculaire). Le critère des choix sera la compatibilité et la résonnance avec le besoin en cours. On constate que l'abstraction dans l'action est à mettre en parallèle avec l'abstraction de la perception. Elles sont d'ailleurs très fortement imbriquées ; car l'action choisit en permanence ses sous-chaines résonnantes sous l'influence constamment renouvelée de la perception.

Intersubjectivité

Echelle du sens commun

Au travers du mécanisme de la théorie de la pensée, on voit qu'il existera toujours une distance irréductible entre le sens infiniment singulier du locuteur et le sens infiniment singulier du percepteur. Comment se peut-il que l'on se comprenne alors ? Pour les mots faisant référence aux choses réelles, les concepts sont acquis par un phénomène d'abstraction qui se sature. Face à un concept donné, les expériences saturant, il se produit une sorte de convergence asymptotique de la sémantique du concept. La réalité d'un concept s'enrichit de moins en moins de nuances différentes. Comme les expériences sont similaires de l'un à l'autre, cela conduit chacun avoir des sens synthétiques relativement similaires. Ils sont fondés sur une somme d'expérience relativement commune. Pour être plus précis, la perception n'est jamais vraiment similaire d'un point de vue théorique, elle est à peu près similaire à partir d'« une certaines échelle » de connexion. Entre deux individu, il n'y a aucun sens à imaginer qu'un concept ait la même structure sous jacente, la même pyramide de sens qui le relie aux cellules sensitives. Par contre l'identification d'une réalité particulière va se former chez l'un et chez l'autre en une identité légèrement étendue : une « zone sémantique ». Et à cette échelle, les zones sémantiques» seront connectées de façon très similaires entre elles, parce que ces relation sont issue de la perception du monde qui elle est stable pour tous. Ainsi les mêmes reconnaissances sous-jacentes ont lieu au dessus des « mêmes » zones sémantiques. Cela produit le sens perceptif commun.

Cela est d'autant plus vrai que les expériences sont communes, proches et abondantes. Il existe une foule de paramètres qui produit une évidente et irréductible distance sémantique entre les individus : les différences de mécanisme physiologiques (dans les cellules sensoriel, dans les mécanismes cérébraux), l'histoire de chacun construisant des concepts référents distincts. Certains domaines de perceptions peuvent être très sensibles aux conditions initiales et produire des structures perceptives très différentes.

Mais tout cela n'empêche pas la construction d'organisations très similaires au dessus de zones sémantiques semblables, autrement dit d'un sens commun. Seulement aucune garantie n'existe sur la présence de telles zones sémantiques semblables chez les différents individus. Le cas particulier des concepts « libres » est intéressant : l'apprentissage schématique au dessus de symboles commun permet de fonder des perceptions communes plus étroites à cause des connexions schématiques donc facilement partagée qui en sont l'origine. Mais pour parler de perception commune, il faudrait encore que les concepts servant de fondements soit relativement semblables. Il est en effet possible d'utiliser les mêmes mots, les mêmes logiques et pourtant de ressentir des interprétations très distantes, ou de produire des explications radicalement différentes s'il fallait rendre compte du ressenti.

Indépendance

L'un de nos objectifs étant de savoir si les mots possèdent une réalité indépendante de la perception psychologique d'un individu, on peut dire qu'un mot de type abstrait - fondé à partir d'autres mots avec peu de supports perceptifs - possède une réalité relativement indépendante du monde. Qu'il soit peu ou abondamment lié au monde

extérieur, ce sont ses connexions sous-jacentes qui forment le sens d'une cellule. Un schéma fondé essentiellement sur des mots forme lui aussi un sens. Si les mots ne possèdent pas ou peu d'enracinement dans le monde le schéma est malgré tout générateur de sens. Il est construit comme au dessus du vide. Ce qui ne l'empêche pas de posséder un vrai sens schématique à partir des mots. En pratique, il y aura toujours une foule de sens liés (parce que les sons formants les mots sont abondamment liés, parce que toute les pratiques du langage sont immensément liée, parce que le contexte d'explication donne du sens,etc.). Mais malgré tout on peut percevoir une certaine indépendance du sens des mots, du moins pour cette partie schématique. Si les mots utilisés pour former ce sens schématique possèdent un sens natif riche, il est malgré tout possible de prendre de la distance : en produisant un contexte en rupture avec toute cette richesse. On peut ainsi construire une sémantique autonome en prenant une « inspiration initiale» sur des mots riches puis en s'en détachant pour un contexte plus schématique. A des mathématiciens, on peut citer l'exemple de la théorie des ensembles formel où le mot « ensemble » donne une inspiration initiale nous mettant le pied à l'étrier d'une pratique symbolique qui sera finalement bien distante de ces intuitions premières. C'est ainsi qu'à été possible la communication d'une pratique servant de fondation aux mathématiques. A un degré moindre d'autonomie, on peut aussi penser à une mauvaise philosophie ou à une pseudoscience, qui construit des logiques au dessus de mot riches de sens en toute liberté. Au lieu de rechercher une résonnance dans l'observation du monde, elle sera fournie par la seule résonnance de la logique abondamment tissées de façon autonome. La construction du sens à partir des mots est libre, et elle peut être pratiquée indépendamment de la résonnance dans le monde. De plus, il n'existe aucune frontière ni aucune perception permettant de distinguer une construction libre résonante, d'une construction libre non pertinente. Nous somme concentré ici sur la recherche de la compréhension juste des choses, mais c'est un contexte singulier. Une construction libre aura souvent une tout autre vocation que la résonnance à partir du monde (on peut penser au besoin d'imagination, à l'art, au plaisir de l'émotion,etc.) . On entrevoit ici l'immense dimension de la liberté de construction de sens chez l'homme, qui lui concède une autonomie vis à vis du monde extérieur.

L'objectif de ce paragraphe était d'établir la possibilité de « sémantiques autonomes », c'est-à-dire des concepts construit au dessus des mots qui peuvent atteindre une certaine indépendance vis-à-vis de l'expérience du monde, des sentiments et même pourquoi pas vis-à-vis des mots eux-mêmes comme en mathématiques formelles. Dans ce cas, les mots fondateurs peuvent être vu comme des briques vides permettant la construction d'un schéma qui possède un sens par le seul fait d'être liés à d'autres mots. Cette indépendance n'est pas profonde ; en creusant le sens on trouvera toujours d'abondante source sémantique qui donne un sens au cadre et à la pratique des mots. Mais il est primordiale pour la compréhension des mathématiques formelles de constater que sous certains contextes, le sens d'un mot peut révéler une certaine vacuité en dehors de sa seule liaison à d'autre mots.

Un autre type d'indépendance peut être intéressant à constater. Nous avons dit qu'il existe une expérience commune dans les mots courants (matériels et événementiels), c'est le cas des mots qui servent à désigner les condensations courantes (les objets ou les perceptions évidentes). Cette fois-ci c'est l'abondance de la liaison qui produit

l'indépendance. En effet, ce type de mots donne une certaine légitimité à l'idée d'indépendance du langage vis-à-vis du locuteur. Cela est possible parce que relativement tous les participants du langage percevront un sens commun (dans l'acception définis ci-dessus de « zone sémantique » semblablement liées). Seulement, on ne peut jamais aller trop loin dans une telle indépendance du langage, car plus on se distance d'un fond commun très sensitif (ou à l'autre extrémité d'une structure schématique « libre »), plus l'indépendance du langage sera réduite. Sachant par ailleurs que l'indépendance n'est qu'un point de vu théorique, il n'existe jamais aucune indépendance stricte dans le langage naturelle. Ici le mot « indépendance » signifie donc perception commune. Je préfère d'ailleurs parler d'interobjectivité ; la partie commune du langage repose sur les objectivités semblablement perçues, sur les connaissances partageables communes.

Référence

Venons en à cette question primordiale: à quoi font référence les mots du langage ? L'essentiel de la réponse a déjà été donné : il n'y a pas de référence absolue pour un mot. Un mot regroupe un tas immense de concepts, d'origines variés, synthétisés de façon très variablement unie. Sachant en plus que le contexte influencera énormément le sens d'un mot, il est difficile de parler de référence.
Maintenant dans un contexte donné, rien n'empêche un mot de posséder une structure relativement indépendante et stable qui dirige la perception d'un mot vers une référence bien définie par une « zone sémantique » commune aux individus. Dans certaines pratiques mathématiques formelles, un mot peu avoir un usage complètement mécanique bien définit par son contexte. On peut trouver ainsi de solide référence.

A la question « A quel type de réalités les mots font référence (mentale, matérielle, etc.) ? », la réponse est relativement simple : selon notre approche, la référence d'un mot peut porter sur des choses très variables et de toute nature (matériel, événementiel, verbale, émotionnel…). Mais on ne peut valablement parler de référence qu'à partir du moment où l'expérience recouvre une réalité interobjective, au moins dans un contexte donné. Sans aucun contexte c'est beaucoup moins probable ; peut-on dire que des mots comme « le goût de la courgette », « l'amour » ou « le cosmos », possède une sémantique universellement bien référencée.

Venons-en aux références matérielles. Quand on dit que la référence est un objet matériel (un arbre par exemple), il s'agit toujours d'abord d'une référence mentale, on ne peut pas y échapper. L'idée « d'arbre » est une idée très abstraite issue de nos abondantes expériences. C'est une synthèse immense. Mais parce que cette réalité est forgée sur une expérimentation relativement commune (ça reste à voir : le mot « arbre » dans des régions différentes de la planète…), on peut dire que c'est bien le réel la référence. La matérialité forme donc une référence possible. Il faut comprendre cependant que c'est un réel synthétisée au dessus de la sommes de nos expériences. La référence est un réel partagé car semblablement synthétisé, naturellement ou culturellement. La matérialité naturelle a l'avantage d'être relativement stable pour beaucoup de concepts, d'où la possibilité d'une authentique « référence extérieure ».

La référence est encore plus directe pour un événement spatio-temporel précis que l'on a vécu ; parce qu'il est unique. Mais dans ce cas aussi, la synthèse et l'abstraction ne sont pas contournable. Toute perception d'un événement est formée à partir des synthèses déjà effectuées, ainsi même face à une réalité unique, la référence possède d'immenses contours de subjectivité ; et c'est sans parler des influences perceptives variées. C'est seulement vu dans sa singularité que l'événement possède une référence d'apparence fixe. Elle est beaucoup moins objective face à une sémantique soumise à l'analyse des concepts.

A l'inverse la référence peut-être très précise pour un objet hautement abstrait. C'est ce que nous avons décrit dans la possibilité « d'indépendance » produit par un sens schématique autonome. Les mots construits par un sens vidé au profit de leur seule définition schématique mutuelle. C'est le cas d'une grande partie des mathématiques théorique (quand on se concentre sur la sémantique schématique et que l'on met à distance la nature interprétative ou originelle des termes).

Identité

Au regard d'une réalité verbale si multiple, sémantiquement si malléable, on est en droit de s'interroger sur la possibilité même d'une identité ? Inversement, le concept « d'identité » est tellement évident quand on pense aux choses qui nous entourent. Il faut mettre ces tensions en cohérence. Commençons par comprendre que la notion d'identité est une notion relativement multiforme. La référence, le point d'appui d'une identité peut résulter de plusieurs approches :

- On peut parler de l'identité derrière un mot en comprenant tout ce à quoi se rattache le mot, c'est le mot qui est pris comme référence de l'individualisation. [Exemple : « une table » regroupant tout ce que peut évoquer ce mot (analyse) dans une recherche d'unité sémantique (synthèse)]. C'est une pratique commune dans l'analyse moderne du langage. Et à défaut de mieux ou par conviction, le langage à souvent été pris comme la référence.
- On peut parler de l'identité d'une réalité matériel pour désigner l'existence d'un objet à part entière et bien individualisé. [Exemple : « mon clavier informatique » situé devant moi]
- On peut appeler identité toute chose qui possèderait une référence interobjective bien définie. L'idée de référence devient alors fondamentale pour le concept d'identité. Tout ce qui se partage de façon non équivoque, selon un sens commun relativement pertinent, qu'il soit d'origine sensoriel ou culturel. [Exemple : « Jules César » représente une identité culturelle très différentiée de l'un à l'autre mais avec une identité commune].
- On peut à nouveau parler du concept de référence, en appelant identité l'existence d'une référence intersubjective bien définie : tous ce qui se partage en ayant l'impression d'y voir une réalité commune, mais si rien ne garantie une moindre communauté sémantique identique pour tous. [Exemple « le gout d'une orange », on sait qu'il fait référence à quelque chose mais il est probable qu'il soit très variable de l'un à l'autre]. En voyant la difficulté qui existe à parler d'interobjectivité, on peut plus modestement se contenté d'une intersubjectvité parce qu'on ne connait jamais la

part sémantique qui est partageable (elle est d'ailleurs théoriquement très difficile à définir dans notre modèle. Elle est sans frontière possible)

- On peut aussi appeler identité les réalités sur lesquels existe le sentiment de « distinguer nettement» une unité. C'est le sentiment personnel qui est pris comme toise de l'identité. [Exemple : « le gout boisé de ce vin »]. Ces identités peuvent n'avoir aucune existence autre que personnelle. Elles peuvent être carrément « fausse ». Rien d'autre qu'une perception ne lui donne du sens. Elles ne sont que des ressentis bien identifié. C'est donc la version la plus large possible de l'identité.

C'est cette dernière version que je préfère choisir ; et pour plusieurs raisons : sa largeur est une sorte de fond conceptuel. Prendre une référence d'un certain type pose le problème du phénomène de bord, on trouvera toujours un concept qui flirte avec la consistance et l'inconsistance d'un certain type. Prendre la réalité intersubjective comme fondement pour optimiser ce phénomène pose le problème de l'impossibilité d'une garantie que l'intersubjectivité existe. La perception individuelle n'a pas besoin de garantie de fonctionnement : on ressent ou non une identité. De plus, ce sentiment individuel d'identité recouvre tous les autres. Il ne possède aucune garantie d'être classable dans les autres types (interobjectif, intersubjectif). Il n'a qu'une garantie individuelle. C'est un sentiment. En fait, on peut le définir encore plus profondément qu'un sentiment. L'identité n'est pas « un sentiment à propos d'» un concept. On peut la voir comme un automatisme perceptif sans aucune analyse, sans aucun recul: la perception d'une « réalité unie » avant même de sentir une quelconque unité. On pourrait tout simplement dire une « perception », si la largeur du mot ne pouvait pas référer à des ressentis d'une extrême inconsistance.
Cette identité peut ou non être « partagée » par d'autres. Elle le sera dans son positionnement par rapport au contexte s'il s'agit d'une réalité intersubjective, et partagé dans son organisation interne s'il s'agit d'une réalité interobjective. Encore faut-il que ladite perception possède les moyens d'authentifier sa structure interne par une analyse.

En fait, je pense que ce concept d'identité (individuel) est la base de toute perception. Je nomme ces « identités perçues » des « condensations » pour signifier que la réalité de nature fondamentalement multiple et complexe nous apparait généralement comme rassemblée en des figures nettement distinguables, des figures qui ressortent de la totalité perçue. Toute perception d'une condensation est synonyme de ressenti d'une identité. Ces « identités » trouvent leur origine dans une réalité qui n'est pas conceptuelle mais mécanique : le flux de la perception suit une propagation automatique et quand il converge vers une cellule qui synthétise distinctement un concept, on obtient la reconnaissance d'une identité (sans avoir besoin du mot identité). Ce phénomène est fondamentalement personnel parce que certaines identités n'auront manifestement qu'une existence personnelle. Cependant cette réalité étant à la base du mécanisme de perception, elle est commune à tous dans son mécanisme ; mais pas face aux toutes les expériences ; et cela d'autant moins que les réalités observées sont indistincte.

L'objectivité d'un concept, c'est la possibilité de posséder en commun une perception de son identité. C'est au fondement de la démarche scientifique que de partager ces

ressentis individualisés pour éprouver leur communauté. Je ne sais pas si j'y parviens, ni même si ces concepts rendent cela possible …

Expressivité

On sait que le langage possède un immense pouvoir d'expression, mais peut-il tout exprimer ? Non, il y a des choses qui resteront à jamais individuelles : « le goût d'une courgette » est manifestement différent de l'un à l'autre, et pas seulement émotionnellement. Il y aussi une saveur. Cette saveur, liée à une émotion (et bien d'autres choses), produit un sentiment uni qu'on ne peut pas exprimer quand on pas de référentiel pour le positionner. « Les gouts et les couleurs ça ne se discute pas ».

Le bleu

Permettons-nous une petite digression sur ce sujet. On sait aujourd'hui discuter les couleurs à partir d'une référence stable : les connaissances de la physique. Le principe de formation des couleurs par les longueurs d'onde, joint à la connaissance des cellules visuelles réceptrices, nous donne une compréhension satisfaisante du mécanisme de perception des couleurs. Des expériences montrent que nos récepteurs ne fonctionnent pas tous de façon identique, ce qui produit des différences de perception (le daltonisme parmi d'autres). Quelle est donc « l'impression générale produite par une couleur » ? Qu'est-ce que le bleu ? A la suite de mon modèle, je propose de situer cette impression non pas dans le fonctionnement des récepteurs (dans les « qualias »), mais dans la synthèse des relations que cette couleur a accumulé avec les objets de son expérience. Les récepteurs produisent la dissociation des couleurs, l'intensité perceptive, etc… Ils ont donc un impact sur le sentiment générale de la couleur parce qu'ils vont jouer un rôle prépondérant dans les connexions engendrées par leur stimulation ; à cause leur mécanisme singulier. Mais ce n'est pas dans le mécanisme de la cellule sensorielle que je vois le « sentiment général. Je l'imagine plutôt dans l'organisation des contenus (des objets bleus expérimentés) et dans les synthèses occasionnés au dessus de cette perception commune. Les récepteurs sensitif sont seulement indirectement à l'origine du sentiment global de la couleur, parce qu'influant dans le fonctionnement. Pour confirmer cela, j'imagine l'expérience suivante : en portant constamment des lunettes qui échangeraient les couleurs (tout en respectant les dissociations de couleurs). J'ai tendance à croire qu'après un temps d'éducation, un temps d'habituation aux nouvelles couleurs, les connexions perceptive retrouveraient assez vite le chemin des synthèses précédemment établie (car déjà liées par tout ce qui n'est pas « couleur »). De sorte que l'impression de « bleu » reviendrait s'installer « comme à l'origine » malgré l'échange des couleurs par les lunettes. Si c'est bien le cas, les couleurs serait liées à la perception du monde comme synthèse, bien plus que comme impression du à une longueur d'onde. Et ce serait davantage nos différentes capacités de distinction parmi les couleurs et nos expériences relatives qui rendraient les impressions fondamentalement différentes. Cette réflexion peut nous éclairer sur la difficulté d'expressivité des couleurs par le langage qui n'est pas seulement du à la nature propre de la couleur mais aussi à l'influence immense de l'expérience ; sans parler des différences physiologiques et de la difficulté d'une perception absolu des couleurs.

L'expressivité du langage vis-à-vis des formes, des spatialisations, des perceptions musicales, etc… est très limité comparée aux sensations générées et mémorisables dans ces secteurs de la perception. Cela provient d'une complexité immédiate et non réductible à un ensemble restreint de références du langage.

Les mots sont plus ou moins que la pensée

L'expressivité du langage connait d'autres limites importantes. On peut les aborder en posant la question suivante : le langage exprime réellement la pensée ou seulement une image réduite ? La réponse est de nature complexe. Dans un jet rapide, on peut dire que le langage n'offre que ses mots et ses structures pour s'exprimer, comment pourrait-on mesurer ? C'est le mécanisme de la théorie de la pensée qui nous propose une mesure : le mécanisme automatiques de l'action, dirigé par les activations contextuelle vont produire les mots les plus proches de la pensée en cours, ainsi que les structures grammaticales et syntaxiques les plus adaptées pour lier ses mots entre eux et conformité de sens avec ladite pensée. Ainsi le langage apparait comme une interpolation de la pensée au travers des mots et structures disponibles.
L'analyse du sens de n'importe quel mot montre l'immense richesse sous-jacente en nous à l'idée de ce seul mot. Il en est de même pour tout ressenti quel que soit la nature varié de son contenu. Ainsi il semble un possible qu'un unique mot abstrait interobjectif puisse véhiculer la finesse singulière du moindre sentiment ressenti. On peut dire que dans les mots exprimés, il y a souvent beaucoup moins que dans la pensée ressentie. En disant cela, on travaille sous l'hypothèse souvent fausse, qu'une phrase traduit une seule idée. En général, même pendant la parole notre pensée est en mouvement. Et le choix les mots et des structure évolue dynamique tant qu'ils restent compatibles. Il n'y a donc pas une seule origine conceptuelle à une phrase. Mais cette simplification est utile pour établir l'écart entre le ressenti et les mots. Le ressenti d'une pensée correspond à la position d'une cellule dans l'ensemble des liens de sens tissés. Cette cellule n'est qu'un ressenti unique, singulier. La cellule est inconsciente de sa position dans le sens ou la seule façon de préciser cette position serait d'en rendre compte après coup, analytiquement et complètement. Or toute analyse sur la pensée mobilise d'autre pensée très éloignées qui rend impossible l'analyse exacte de la position. Ainsi le langage naturel et même le langage analytique est incapable de rendre la position complète d'une pensée.
A l'inverse, au vu du mécanisme automatique de fabrication du langage, les mots choisis forment probablement le meilleur rendu possible vis-à-vis des contextes mentaux activés. Ils sont issus d'une recherche automatique de proximité de sens. Puisque l'analyse précise du sens est impossible, puisque la traduction est contextuellement la meilleure possible, on peut dire que la sémantique des mots choisis ne pas être loin de la qualité sémantique. De l'autre côté, on peut envisager que les mots relèvent de choix discrets parmi une petite étendue ; il y a fort à parier qu'il existe une distance irréductible entre le sens ressenti pouvant cumuler des finesses immenses de toutes les origines et les mots si peu nombreux s'efforçant à produire le meilleur sens possible.
Mais il existe encore d'autres influences en jeu. Le langage une fois énoncé est à nouveau perçu par nous. Il est raisonnable de penser que cette perception induit une sémantique qui transforme subtilement le sens initial qui a servi à sa génération. Le nouveau sens perçu s'attache au mot nouvellement énoncé déjà intérieurement (lors de

la conception encore non énoncée) puis extérieurement (à l'écoute verbale). Les mots choisit peuvent générer entre eux (intérieurement ou extérieurement) des résonnances non perçus au moment du choix des mots. Cela décrit une auto-influence non maitrisable de la sémantique.
De plus, un choix de mots énoncés produit une sorte de cristallisation de la pensée autour de l'énoncé qui va devenir une référence durable alors que la pensée primitive aura souvent disparue. Il n'est pas rare que nos paroles nous surprennent ou nous trahissent sur le sens de ce que nous avons voulu dire. Face à un changement contextuel, par un mot d'un interlocuteur, ou au travers de la propre perception de nos mots, le sens peut changer radicalement.
Ainsi il existe dans le dialogue une synergie très complexe entre ce qui est pensé et ce qui est dit ; ils interfèrent de façon complexe en action-réaction. L'idée est fécondée par les mots, et les mots trahissent l'idée. D'où la seconde idée qui consiste à dire que les mots disent plus que le sentiment initialement pensé.
Et l'on entrevoit de loin comment ce dire-moins et ce dire-plus s'agencent dans un jeu qui existe entre nous et nous-mêmes, qui est vécu de façon inconsciente la plupart du temps parce qu'on assume notre identité unie (pour des raisons variées de psychisme profond, de norme de réaction, de positionnement, etc…). Et aussi pour la raison essentiel que la distance entre le sens initial ressentie et le sens ressenti après coup correspond à une forme d'imprécision (de sous-détermination) du langage à laquelle nous sommes irrémédiablement habitué et/ou peu sensible par manque d'auto-analyse fine.

Ainsi selon la nature de la sémantique ressentie, le langage est incapable de traduire la substance du sens perçu. Parfois le langage dépasse le sens en le fécondant par synergie dans une interaction de sens avec nous même dont nous ne maitrisons pas l'accomplissement. Parfois nous sommes privés de la possibilité de rendre efficacement la finesse d'un ressenti unique trop rapidement transformé pour tenir la route d'une expression affinée. Le mécanisme de production du langage est fait d'automatisme dont nous n'avons pas conscience, nous n'en percevons que le produit fini.

Et j'oubliais de dire … que le langage est en général assez fidèle à notre pensée (à une échelle sémantique d'imprécision relativement fine).

Spécificités du langage mathématique

Nous en avons laissé échapper quelques bribes, le langage mathématique formel possède une nature radicalement différente du langage naturel. En cela je m'inscris à revers de la plupart des mathématiciens-philosophes qui cherchent dans le langage mathématiques la source du fonctionnement profond du langage naturel.

Sens schématique

Selon la perspective que je propose, les mathématiques sont la science des schémas interprétés. Pour parvenir à décrire de « simple schéma », le langage mathématique doit être fondé une certaine autonomie. Le schéma est une construction de sens au-dessus du vide. La partie primordiale du sens des mots en mathématique est fondée sur les liens de sens qui unissent les mots entre eux vidé de leur fond sémantique sous-

jacent. Evidement, même si l'objectif des mots est leur vacuité, ils ne sont pas choisis au hasard. Leur choix repose sur des sémantiques initiales qui évoquent lesdits schémas d'une façon ou d'une autre (le plus souvent mais pas forcément).

En fait, cette vacuité n'est qu'une approche idéale ; les mathématiques ont une histoire, les concepts univoques ont des origines non univoques et ces influences pèsent lourd sur le choix des mots, sur les concepts et sur leur perception. Et pour construire un langage qui parle de l'univocité schématique, il faut que les mots perdent beaucoup de leur sens propre et se réduisent à des supports pour se limiter au sens issue de l'interrelation qui les définit.

On peut citer l'exemple des axiomes de la géométrie d'Euclide qui peuvent être vue de deux façons :

- comme parlant de représentation mentale richement issue de l'expérience que sont pour nous les droites, les plans et les points.
- ou bien au contraire comme le seul sens issue de l'interrelation définit par ces axiomes.

La première façon nous donne une incarnation expérimentale de la seconde. La seconde représentation pourrait éventuellement s'appliquer à d'autres concepts, très différents de la géométrie. L'interrelation produite par ces définitions est libre de notre représentation spatiale. Il serait plus commode de changer les noms « point », « droite », « plan » en des termes insignifiants pour se détacher de l'incarnation expérimentale initiale qui est issue d'une abstraction du monde réel. Maintenant, didactiquement parlant, il est utile de procéder dans ce sens naturel parce que notre expérience nous donne une riche connaissance, une intuition profonde, de cette structure et nous permet d'y avoir accès par notre expérience accumulée. Cette connaissance nous donne un avantage intuitif important pour leur manipulation qui ne serait pas si elle était définie de façon détachée. De plus il reste à déterminer la pertinence de ce détachement du monde géométrique, existe-t-il une autre réutilisation possible ? Les mathématiques vues uniquement comme mesure d'elles-mêmes sont elles pertinentes ?

A ce stade, on possède déjà l'archétype du fonctionnement du langage mathématique :

- Il doit nous exprimer une nature interrelationnelle de concepts désincarnée de toute sémantique naturelle afin d'atteindre l'univocité schématique.
- Il semble utile (voire important) de l'acquérir en se fondant sur nos représentations mentales acquis par l'expérience du monde.
- Et en retour, l'objectif et l'utilité des mathématique semble bien liée à produire une lecture pertinente du monde.

Il existe donc le dilemme permanent de se laisser inspirer par nos connaissances abstraites du monde ou de s'en dégager pour atteindre la seule réalité mathématiques.

Formel versus naturel

On constate des différences fondamentales entre le langage mathématique formel et le langage naturel :

- Le langage mathématique vise à exprimer une réalité schématique univoque indépendante car définie par l'interrelation ; alors que le langage naturel (possédant aussi cette possibilité sémantique) cherche au contraire à s'enraciner dans la sémantique expérimentale qu'elle soit extérieure (la réalité matérielle) ou intérieure (réalité émotionnelle, subjective). La recherche d'indépendance sémantique est une pratique ésotérique éloignée de la compréhension naturelle : il faut se mettre à distance du sens naturel par l'abstraction.
- Le langage mathématique se sert des mots naturels comme prétextes, comme source d'inspiration dont il faut se dégager alors que le langage naturel y trouve la profondeur de sa sémantique qui, subséquemment, est insondable.
- Les réalités produites par un langage mathématique vise l'univocité qui idéalement ne possède pas de flottement sémantique. De l'autre côté, le langage du monde naturel est immensément dépendant de sa contextualité, très étendus et très malléable, orientable à souhait par mixage avec des sémantiques contextuelles ajoutées.
- Un langage suffisamment mathématique permet des manipulations relativement rigides de sens. C'est dans la pratique manipulatoire que se trouve la dimension sémantique de l'univocité, le reste est interprétation ajouté. Seulement, il est possible d'appliquer ces manipulations à la sémantique du langage naturelle. Cela donne l'illusion d'une organisation naturelle du langage et du monde. C'est une sémantique manipulatoire imposé qui n'a rien de complètement naturel (bien qu'elle possède des source naturelle). Le naturel propose des relations de vérité, des manipulations sensé, la théorisation formelle modélise ces sentiment naturel en des pratiques univoque qui n'en sont que des versions pauvre et dégradé par l'univocité. En réimportant ces pratiques dans le langage naturel, on peut construire des abstractions sémantique pour établir une compatibilité. Mais ces pratique n'auront de cesse de se poser en conflit avec les pratique vraiment naturelle qui elles n'ont aucune prétention univoque, mais une prétention de pertinence (maximisation de sens par un minimum de pratique). C'est dans ces conflits que se débat bon nombre de philosophe du langage ayant une approche par référence fixe.
  Le langage naturel possède bien une certaine réalité logique, relevant parfois même d'une certaine pratique mécanique. On pensera aux structures grammaticales et syntaxiques du langage. Mais c'est aussi et surtout au travers de sa connaissance du monde dans les concepts de vérité de conjonction de disjonction de déduction qu'il existe des réalités ayant grand rapport avec notre logique formelle. L'abondance des réalités expérimentales laisse en effet entrevoir des réalités de nature univoque. Ces réalités se synthétisent en nous partiellement ou complètement, de façon contingente ou sous pression évidente. Ainsi certaines réalités logiques naturelles trouvent leur place dans le langage et dans les structures du langage. Quand on regarde les structure grammaticale, on comprendre que notre rapport au monde (temporel, en relations d'individu, en quantité, etc…) est grandement à l'origine des structures du langage de façon (mais pas jusqu'à l'univocité en général). La logique naïve du langage, loin de l'univocité, repose sur un besoin de sens plus que sur une mécanique manipulatoire qui se devrait d'être fiable. Par exemple le « non-sens logique » (ce qui n'est pas commun) ne possède pas de manipulation prédéfini contrairement au langage formel.

Et il aura fallu beaucoup de temps aux mathématiciens et philosophes pour dégager une structure univoque à la logique, des siècles séparent Aristote de Zermelo ou Russel.

Et il n'est pas certain que le dégagement de l'enracinement sémantique naturel soit encore suffisant. En particulier sur les questions de vérité.

Référence formelle

La question traditionnelle de la référence (A quoi font référence les éléments du langage ?) appliquée au formalisme mathématique prend une dimension curieusement multiples :

- En tant que structure univoque et schématique, la référence est bien établie par la désignation d'un nœud de l'interrelation vide de tout autre sens (c'est du moins un point de vu idéal qui a guidé les pratiques). C'est une référence relativement creuse dans le sens où il s'agit d'une simple autoréférence vide d'un autre contenu. Mais c'est ce mode de définition qui confère sa nature univoque aux définitions mathématiques.
- Dans sa pratique du langage symbolique, le mathématicien ne cherche pas à se dégager de la richesse sémantique pour atteindre le dénuement univoque. Au contraire, la pratique mathématique, même symbolique, est fondée sur la construction d'une abstraction au dessus de toute la richesse sémantique disponible, exactement comme pour le langage naturel. C'est un mélange des concepts expérimentaux naturels et des structures univoques en jeu. C'est là que se trouve la richesse de l'intuition mathématique. Autrement dit, la référence dénudée et univoque est la condition de manipulation d'un langage mathématique alors que sa pratique est, comme pour le langage naturelle, fondée sur la richesse sémantique.
- Dans le sens schématique lui-même, il existe un autre mode de référence. En effet, nous avons vu et nous en reparlerons, mais les schémas sont insuffisants pour exprimer les mathématiques, il faudra une accumulation d'interprétation. Or parmi un des mécanismes fondamentaux de l'interprétation, il y a l'idée de donner un sens à chacun de ces nœuds vides. L'interprétation consiste à voir autre chose que le schéma lui-même. Et c'est là un mécanisme fondamental de la pratique mathématique, des raisonnements à plusieurs niveaux en parallèles. Le schéma est la source d'organisation d'un autre sens que lui-même. Que ce sens soit matériel (un mouton, deux mouton, trois mouton,….) ou qu'il soit constitutif de la construction des objets mathématiques comme empilement interprété de schémas. Ainsi même dans une mathématique désincarnée d'un maximum de représentation sémantique naturel, les sémantique en jeux dépasse le schéma par la référence à d'autres objets mathématiques, à des manipulations. C'est un mécanisme incontournable d'une pratique mathématique élaborée.

Mécanisme de description

Transposition schématique

Le mécanisme de base du langage est le symbole. Le symbole désigne un schéma, un concept, une méthode et de façon générale n'importe quelle identité reconnaissable. Le symbole est accessible au travers d'un signe désignateur qui lui-même un « schéma reconnaissable ». L'intérêt de ce signe est de pouvoir être mis en relation avec d'autre symbole dans un cadre dégagé des sémantiques enfermé dans le symbole. Ainsi en est-il du langage, la manipulation symbolique existe sur de nombreux niveau de symbolisme imbriqué (sonore, verbale, grammaticale,…) , ainsi de l'écriture et aussi du langage mathématique.

Si les symboles font référence à une autre réalité qu'eux-mêmes, ce n'est pas sans nuance. Il existe de nombreux paramètres qui interfèrent dans la rigidité de la sémantique porté par un symbole : les fluctuations référentielles du aux mouvances du contexte, l'action en retour du langage sur le sens, la possibilité de changer de référentiel sémantique (il y a une grande différence entre un référentiel limité à l'interrelation définitionnel ou la largeur de la sémantique naturelle).

Voici un mécanisme fondamental du sens : en reliant les symboles à l'intérieur d'un cadre autonome, on construit un sens par ces liaisons. Ce sens se transporte aux références sous-jacentes des symboles et produit le transport d'une idée dans un nouveau cadre. C'est une sorte de généralisation de l'analogie : on transporte un schéma sur une autre réalité. En mathématiques cette pratique peut atteindre l'univocité. En pratique, les sens sous-jacents se transportent plus ou moins facilement. Pour que le transport soit « sensé », il faut que, une fois transporté, le sens global produise une unité naturelle ; c'est-à-dire qu'il évoque des sens suffisamment liable pour produire une apparence de cohérence. Pour cela il faut que les sens sous-jacents soient suffisament reliés en amont dans des sémantiques de succès. En résumé, il faut que les sens sous-jacent forment un sens compatible avec le schéma supérieur. Il faut la théorie de l'action (sous-partie de la théorie de la pensée) pour justifier ce concept par un mécanisme automatique, la perception ne suffit pas. Une phrase au départ insensée comme « la choucroute prend son ventre d'avoir tant rit de cette miséricorde » ne correspond pas à un tel sens interpénétrable ; au moins jusqu'à ce qu'un contexte lui donne un sens acceptable. L'Interpénétration de sens, ou la cohérence est une notion qui n'est pas primitive, mais assez rapidement issue des mécanismes automatiques.

Appliqué aux mathématiques sur des symboles univoques, ce mécanisme est plus simple. Mais appliqué au mécanisme d'interprétation, il n'est l'est pas forcément, même dans des cas extrêmement simples. Pour prendre un exemple : on peut définir les entiers comme le déploiement d'une simple boucle, le parcours de cette boucle déploie une chaine de cellules sans fin. Ce mécanisme mentalement très complexe d'une sémantique très riche correspond à la description d'un mécanisme univoque. On constate que notre besoin d'un cadre explicatif non univoque est primordial à la compréhension de cette explication, au moins jusqu'à la perception de son abstraction. Les langages mathématiques passent souvent sous silence la part interprétative en se concentrant sur la part univoque. L'interprétation devant aller de soi. C'est d'ailleurs un

automatisme culturel en mathématique que d'interpréter systématiquement « jusqu'au bout » les écritures mathématiques. Je propose au contraire de bien distinguer les étapes d'interprétation à l'intérieur de la pratique mathématiques. C'est source d'une grande clarté dans la nature et la manipulation des concepts mathématiques. C'est un des thèmes centraux de cette approche.

La reconnaissance

Le symbole une fois expliquée, il faut comprendre que le mécanisme fondamental des mathématiques est la reconnaissance des schémas. La reconnaissance est un mécanisme automatique de la perception. C'est un mécanisme qui reconnait une certaine complexité « en une fois », cela est rendu possible par la vision notamment. Dans une première approche simplifié, il est bon de se limiter à la possibilité de perception des schémas (si l'objet est trop complexe, la reconnaissance est analytique, elle s'établie de façon parcellaire puis lié en un schéma unique supérieure). Nativement dans ces conditions, la reconnaissance est un principe automatique. On pourrait envisager une pratique mathématique plus univoque en refusant la reconnaissance instantanée et en demandant de justifier chaque reconnaissance de schémas. Il faudrait construire une « mathématique du parcours » qui établirait la reconnaissance par le parcours d'un schéma vu de l'intérieur comme un labyrinthe dont on marquerait les carrefour. Ce serait là une mathématique complexe nécessitant la notion de nommage intermédiaire qui obscurcirait considérablement l'accès aux mathématiques. La reconnaissance est un concept tellement fondamental de la perception humaine, les mathématiques sont pratiquées essentiellement sur ce mode de la reconnaissance immédiate. En fait pour construire de façon étagée, c'est quasiment inévitable en termes de possibilités interprétatives. En excluant l'idée de reconnaissance, il n'y aurait pas de mathématique car la fonction symbolique s'exerce au travers du mécanisme de reconnaissance. C'est la nature de la perception humaine que de reconnaitre les schémas, les nommer symboliquement pour les réutiliser. La reconnaissance existe donc dans la nature du langage. Tout cela n'empêche cependant pas d'aller au-delà en construisant une mathématique du parcours : cela a été réalisé dans l'informatique matérialisé par les ordinateurs. Ils n'utilisent que des 0 et des 1 et fonctionne par des manipulations pas à pas sans aucune perception globale intuitive. On réalise ainsi la tension qui existe entre le besoin de compréhension (la perception humaine globale intuitive qui procède de l'interprétation) et le besoin d'univocité (mécanisme automatique qui procède de la manipulation).

Linéarité du langage

Un langage mathématique doit permettre de décrire un schéma. Une telle description n'est pas linéaire, les schémas sont de nature « poly-dimensionnel », (associé à l'interprétation, on a vu qu'ils pourraient servir de base à toute la topologie). Le langage, lui, est linéaire. Il faut donc élaborer des stratégies de « mise à plat ». Etablir une description linéaire de ce qui est fondamentalement pluridimensionnel. C'est un des rôles essentielle de l'écriture « à la Frege » qui, en définissant la dépendance des variables par leur ordre d'écriture, permet de construire des dépendances (des liens) schématiques multidimensionnelles (ou plutôt libres de toute contrainte dimensionnelle). La théorie de la démonstration a bien mis en évidence ce rapport entre linéarité et

schématisme dans le calcul des séquents. C'est d'ailleurs une contrainte générale du langage, du discours explicatif, du discours narratif, … que de rendre linéaire une réalité non linéaire.

Le principe du nommage symbolique est au fondement de la reconnaissance et de la réutilisation, en permettant d'identifier des concepts. L'attribution du nommage peut d'ailleurs lui aussi posséder une structure syntaxique, grammaticale, positionnel,… C'est en général pour accroitre son pouvoir d'expression par la diversification des identités en jeux, par la concentration symbolique de la diversité.

Analyse du théorème d'incomplétude de Gödel

Armé de toutes ces perspectives, entreprenons une relecture du théorème de Gödel. Je prendrai référence sur la source [1].

L'impact interprétatif de notre approche concerne beaucoup d'autres théorèmes que celui que nous allons étudier. Pourquoi étudier spécifiquement le théorème d'incomplétude Gödel ? Parce qu'il est le lieu de l'auto-analyse du cadre classique de toutes les mathématiques. C'est un concentré de la fondation et de l'aspiration des mathématiques (à un formalisme équivalent près). Pour parvenir à étudier le formalisme face à la vérité, Gödel doit « coder » l'ensemble du cadre formel. Toutes les pratiques et les concepts servant à la démonstration doivent être analysés pour tenter de réduire la vérité à la prouvabilité. Dans ce théorème, Gödel concentre quasiment tous les concepts pour lesquels je propose une remise en cause. Sa relecture est donc propice à montrer la divergence des approches. Et pour finir, quand on considère que les mathématiques ne sont que des procédés manipulatoires univoques, l'importance de la conclusion philosophique du théorème d'incomplétude de Gödel me semble changer de perspective (sans forcément renier ses conclusions). L'analyse de ce théorème donnera, en une fois de façon de façon précise et formelle, un regard critique sur la perception standard de toutes les mathématiques classiques.

Parvenu ici, nous avons situé nos principaux changements de perspectives face à la largeur des mathématiques classiques. Nous commencerons par les appliquer de façon informelle au théorème de Gödel, puis nous situerons le nœud formel précis de la divergence de vue. Cette précision formelle donnera une dimension très explicite à ces changements de perspectives. Il appartiendra à chacun d'en juger.

On va s'attentionner à une analyse des schémas et des interprétations en jeu. Les objets mathématiques seront présentés comme une accumulation de nombreuses strates imbriquées de schémas et d'interprétation. L'objectif consiste à séparer le raisonnement sur les schémas, des schémas eux-mêmes. Cela demande de distinguer ce qui est différent et de bien repérer les interprétations qui font passer d'une structure à une autre (souvent très naturellement). Caricaturalement, il y a le dur et le mou. Le dur, c'est une description de liens bien établis (des arbres, des parcours d'arbres, des structures rigides); ce sont des objets dont la définition est établie univoquement selon une accumulation bien ordonnée. Le mou, ce sont des affirmations, des assimilations qui ne sont pas garantie a priori ; ce sont des spéculations que l'on cherche à positionner, ce sont des identifications « naturelles » qui ne sont pas définies de façon univoque.
Voici décrite bien schématiquement la stratégie que je me propose d'appliquer face au raisonnement de Gödel.

Motivation générale du théorème

Le théorème d'incomplétude de Gödel est ancré dans la distinction qui existe entre vérité et prouvabilité. Il est né de la recherche de fondations logiques pour les

mathématiques au début du XXe siècle. Ces fondations ont pris la tournure attractive du formalisme axiomatique. Elles permettent de recouvrir l'essentiel des pratiques mathématiques et me semble posséder encore aujourd'hui la confiance du plus grand nombre quant à leur pertinence en tant que fondement des mathématiques. Il en existe de nombreuses déclinaisons, dont les figures de proue sont celle de Zermelo-Frankel, de Russel ou de Von Neumann, suivit une foule de modification et changement de perspectives.

La nature de tels fondements formels est assez atypique face à la pratique mathématique quotidienne, elle en constitue un bouleversement. L'efficacité, la fiabilité et la largeur de ces pratiques ont suscité le sentiment que la nature profonde des mathématiques résidait dans cette pratique symbolique mécanique dénuée de toute intellection (c'est la position philosophique du formalisme). L'intuition ne serait qu'un mode impropre d'accès à cette réalité. A l'opposé, certains ne voient dans le formalisme qu'une approche singulière qui n'englobe ni l'ensemble des pratiques mathématiques, ni leur pouvoir d'expression. Le théorème d'incomplétude de Gödel en est d'ailleurs un argument essentiel.

Sans entrer dans ce débat, on peut se tourner vers une question à peine plus accessible, à savoir : quel rapport la démonstration formelle entretient-elle avec la vérité ? En commençant par une question délicate sur la nature de la vérité : ce qui est vrai est-il prouvable ? Puis une question cantonnée au domaine du formalisme : toute affirmation formelle est elle toujours prouvable ou réfutable ? Les systèmes formels ont une structure commune : on dispose de procédés mécaniques pour construire le langage des affirmations bien formées ; puis à partir d'un ensemble d'axiome et d'un ensemble autorisé de règles de dérivations, on construit mécaniquement l'ensemble des phrases prouvée. Ce mécanisme est celui de la preuve.
A priori, la vérité semble être un concept beaucoup plus abstrait qu'une simple mécanique. Comme les mathématiques ont été réduites à des preuves dans un système formel, il semblait naturel d'essayer de remplacer la notion floue de « vérité » par le concept mécanique et univoque de « preuve ». Cela accompli, la preuve remplacerait la notion de vérité. C'est une ambition légitime à laquelle Gödel va mettre un terme. La prouvabilité est un mécanisme bien défini que l'on peut automatiser. Les systèmes formels étudiés par Gödel sont des structures mathématiques relativement simples et mécaniques, c'est pourquoi ils peuvent devenir eux-mêmes une structure étudiable par ce système formel. C'est parce que la prouvabilité est définie univoquement que l'on peut étudier ses conséquences dans le système formel lui-même.

Analyse préalable

Pour établir le théorème d'incomplétude, de nombreux concepts sont nécessaires. Une analyse du texte nous demanderait de tout aborder de front. Seulement l'analyse détaillée de cette riche démonstration peut nous perdre dans les détails. Je vais tenter de dissocier plusieurs problèmes. C'est pourquoi bien que cela n'ait pas la rigueur de la pertinence, je vais commencer par une analyse du théorème sous forme d'approche isolé des concepts en jeu. Il s'agit de situer le lieu et la forme des principales suspicions qui vont nous guider dans l'analyse détaillée. Elles seront en place lorsqu'on étudiera le texte lui-même.

Les structures en dur

L'intérêt du formalisme est de rendre les démonstrations mécaniques. Cela permet de retirer tout psychologisme, toute interprétation des démonstrations, nous affranchissant des confusions sémantiques possibles. C'est du moins, là, l'objectif. Seulement dans le théorème de Gödel, il y a tellement de structures différentes, les mêmes symboles font référence à beaucoup de structures différentes, il n'est pas forcément facile de situer le cadre de manipulation de ces symboles. L'essentiel de la difficulté est due au fait qu'on étudie un système formel à partir de ce système formel. Ainsi une phrase pourra alternativement étudier ou être objet d'étude. Et comme le passage de l'un à l'autre s'opère sur un mode d'interprétation spécifique (par le plongement dans les entiers et la substitution), il est important d'y être vigilant.
Etant donné qu'on observe un système formel à partir du système formel lui-même, il faut être vigilant à la nature de chaque affirmation : est-elle une vérité intérieure ou extérieure ? Gödel a pour objectif d'étudier la capacité de vérité du mécanisme formel de la preuve. L'objectif est donc de produire un raisonnement uniquement mécanique, une tentative de raisonnement « purement formel ». D'où l'importance d'identifier toutes les parties mécaniques qui établissent des liens non interprétatifs, mais constructifs. La construction de ces structures formelles peut reposer sur des mécanismes interprétatifs, mais ils sont déployés en structure univoque bien identifiée. Tentons une liste de ces structures rigides qui serviront de support aux raisonnements ultérieurs. Nous attribuons un nom à chacune de ces structures pour pouvoir y faire référence ultérieurement.

1-Les entiers - E

EC – Les entiers en chaînes – La première structure en jeu est celle des entiers, vus comme une suite infinie de successeur, en partant d'une origine, le zéro. C'est le plus simple des schémas infinis. Ce schéma par le principe du codage servira de lieu de projection à toutes les phrases possibles.

EF – Les entiers factorisés - Un second schéma d'entiers se greffe sur ce premier schéma, c'est la factorisation en nombre premier. Il peut être vu comme un arbre combinatoire. Chaque entier correspond aux choix d'une suite finie de puissance (portant sur chaque facteur premier possible). Ce schéma n'est plus du tout linéaire. Le théorème de factorisation des nombre premier permet d'affirmer une bijection

entre les deux schémas (EC) et (EF). On admettra avec confiance cette bijection qui ne repose pas sur la notion de langage, mais sur la notion de nombre qui semble très univoque, peu enclin à l'élasticité sémantique.
Ainsi en parcourant la structure EC dans le sens naturel des successeurs, on parcourt inévitablement la structure EF de façon bijective.
Une petite précision s'impose: pour englober la structure de Gödel dont nous allons parler (SE), il faut aller un peu plus loin qu'une simple suite fini de puissance, il faut aussi factoriser en nombre premier les puissances, pour reconnaitre les variables et leur type. Ce qui complique un petit peu la structure, parce qu'à chaque étape de puissance, elle possède une série finie de choix. Voilà plus précisément la structure EF. Comme l'objet de nos discussions ne reposera pas sur la forme de cet arbre, nous n'insistons pas plus.

2-Liste de symboles - S

SL –Suite de Symboles en lettre reconnaissable – C'est l'arbre combinatoire de l'ensemble des suites de symboles. L'écriture des phrases formelles dans Principia Mathématica (PM) utilise 7 symboles augmentés des symboles des variables (de types étagées, en nombre infini). Il s'agit de l'écriture de toutes les suites finies de symboles possibles. Avec 7 symboles seulement, on aurait une structure d'arbre combinatoire simple (avec démultiplication identique à chaque jonction) ; mais avec un nombre de symbole infini (avec les variables), on a un arbre combinatoire de dimension infini (comme pour EF). Chaque nouveau choix de symbole devra être représenté par une chaine infinie, partant du lieu précédent. SL représente donc cet arbre des suites infinies de symbole. Nous ne le décrirons pas mathématiquement, parce qu'il se laisse assez bien deviner.

SE – Liste de Symbole traduite en entier - Au travers du codage de Gödel, la structure (SL) des suites de symboles s'injecte dans la structure des entiers en facteur premier (EF). Car chaque cellule de l'arbre (SL) correspond à un contenu présent dans l'arbre (EF) au travers des nombres attribués aux symboles ou variables (même si ce n'est pas surjectif). (SE) forme une <sous-structure> de (EF) qui sera parcouru complètement quand on parcourt la chaine (EC) des entiers. Cette sous-structure de reliant les nombre et les symboles sera nommée « nombres de Gödel ». Pour avoir un détail de cette structure, on consultera [1].

On peut dire que n'importe quelle suite de symbole finie « possède une présence » dans chacune des structures (EC), (EF), (SL) et (SE).

3-Structure des phrases bien formée - P

PS – Propositions symboliques - Toutes les suites de symboles de SL, ne constituent pas des formules bien formées (on parlera indistinctement de formules, phrases ou propositions). Pour en être, il faut respecter des règles de construction récursives à partir des formules élémentaires et des connecteurs. Ainsi on peut construire, un arbre combinatoire des formules bien formée.
A la différence des arbres précédents, cet arbre ne se construit pas sur un principe combinatoire simple, mais sur une récursivité. A chaque étape, il se développe en réutilisant tous les nœuds déjà existants au travers de toutes les règles de

construction possibles. Chaque étape est une explosion toujours plus grande de possibilité. En fait Gödel à introduit 45 fonctions, qu'on pourrait écrire sous forme d'algorithmes. La fonction numéro 23 (qui utilise les fonctions antérieures à elle) explique comment construire cet arbre des formules bien formées. La technicité du déploiement de cet arbre est importante, mais il ne fait pas de toute que cette construction récursive qui fonctionne par test successif produisent de proche en proche toutes les phrase bien formées possibles. La fonction 23 est en réalité un test de validité, mais on peut en tirer un procédé de construction effectif.

PA- Proposition vu comme un sous-arbre – Les propositions peuvent être vue comme un sous-arbre dans l'arbre des listes de symbole quelconque (PS). Certaines cellules de l'arbre correspondent à des propositions bien formées, un test mécanique fini permet de le montrer. L'arbre (PS) peut donc être univoquement liée à une sous-structure de l'arbre (SL). C'est une évidence que les propositions bien formées sont contenues dans les suites de symboles quelconques.

PE- Proposition vu comme des entiers - Puisque (PA) est une sous-structure de (SL) et que (SL) et en correspondance biunivoque avec (SE), ces formules bien formées sont en correspondance bijective avec une sous-structure de (EF). Elles-mêmes en correspondance avec (EC). Le parcours de la chaine des entiers (EC) « passera » donc par toutes les cellules de (PE).

4-Les démonstrations bien formées -D

DS – Démonstrations faites de symboles - A partir d'une série d'axiomes choisis, on peut construire l'ensemble des démonstrations possibles comme un arbre. En partant du socle des axiomes et des règles de dérivation de la vérité (les règles de déduction) qui sont en nombre restreint, on peut construire de proche en proche toutes les démonstrations. Selon une méthode récursive analogue celle utilisée pour (PS), en utilisant les règles possibles sur les démonstrations formée et les formules valides, on peut construire de proche en proche l'arbre récursif dont les cellules sont l'ensemble des démonstrations valides. Chaque nouvelle étape de l'arbre constituera l'application d'une des règles possible à partir des formules possibles. La fonction numéro 44 (qui utilise les fonctions antérieurement définies) explique comment construire cet arbre des démonstrations (En fait, il s'agit d'un test de validité, mais on peut en tirer un procédé de construction effectif).

DA- Démonstrations vu comme un Sous arbre- La structure (DS) est faite de phrase bien formées donc elle est une sous-structure de (DS) et donc de (SL).

DE – Démonstrations vu comme des entiers - Ces démonstrations valides étant une sous-structure (DA), elles sont donc en correspondances bijectives avec une sous-structure de (EF). Elles-mêmes en correspondance avec (EC). Le parcours de (EC) passera donc par toutes les cellules de (DE)

5-Les 45 et 46 fonctions de Gödel - F

FH- Fonctions écrite « à la Hilbert » - Dans un cadre formel « à la Hilbert » qui utilise un langage de Frege (quantificateur, et définition sous forme de contraintes « tout-en-une-fois ») au dessus de primitives que l'on définit de proche en proche de façon

fonctionnelle, Gödel a défini 46 primitives qui sont des fonctions permettant de manipuler des contraintes sur les entiers pour les mettre en relation avec d'autres entiers ou avec des booléens (la mise en relation est le principe d'une fonction). Chaque fonction de (FH) est la définition d'une contrainte qui affirme l'existence de certaines liaisons entre des variables. Ces liaisons de nature arithmétique, exprime au final une sémantique très précise. Chaque valeur entière de (EF) peut ou non satisfaire ces contraintes.

FN – Fonction numérique – Ces fonctions utilisant toutes sortes de variables intermédiaires peuvent être vu comme établissant un lien entre un (ou plusieurs) nombre en entrée et une valeur en sortie, on reconnait là une fonction numérique. Il y a deux types de fonctions : celles qui satisfont une contrainte entre une variable d'entrée et une variable de sortie qu'on peut alors voir comme une fonction numérique à valeur entière (on dira fonctions numériques). L'autre type de fonction consiste en la simple satisfaction d'une contrainte sur la variable d'entrée (sans observation d'une variable particulière de sortie) qui peut alors être vue comme une fonction numérique à valeur booléenne, qu'on appellera fonction booléenne ou encore une affirmation de vérité dépendant de n.
Résumée ainsi, ces fonctions peuvent être rapporté à un schéma de liens entre des entrées (N) et des sorties (N ou l'ensemble vrai-faux). On peut aussi envisager le schéma version ensembliste : un sous ensemble fonctionnel de NxN pour les fonctions numériques ou de NxB pour les fonctions booléennes. C'est l'aspect fonctionnel qui nous intéresse : produire un résultat à partir d'une valeur en entrée, sans considérer le moyen d'y arriver.
Cherchant à rompre avec cette tendance qui consiste à voir derrière les symboles ce qu'ils signifient (l'interprétation maximale), et à unir toutes les structure à interprétation compatible, nous cherchons ici au contraire à les distinguer. La distinction des définitions (FH) et des fonctions elle-même seront utiles. On se devrait même de distinguer deux structures derrière (FH) : les textes de définitions d'un côté, et le liens entres les variable de l'autres. Mais cette distinction non utile à notre analyse est passée sous silence. (FN) ici est le schéma produit par le résultat de ces liens établis (sans intermédiaire entre l'entrée et la sortie). Les textes (FH) nous parlent de la façon d'établir ces liens possibles entre variable pour aboutir « tout étant fait instantanément » à un lien résultat.

FA – Fonction Algorithmique - Ces 45 fonctions respectent un cahier des charges constructif. Pour réaliser cela, chaque les boucles possède un compteur qui limite le nombre de répétition déterminé en fonction de la valeur en entrée.
Même si Gödel ne le fait pas, car il raisonne dans un cadre « tout en un », on peut traduire chacune de ces fonctions en un algorithme à base d'entiers dans un langage algorithmique standard.
A la différence des fonctions « tout en un » où les liens s'affirment « tous à la fois » de sorte que le résultat de la fonction est instantané sans qu'on puisse voir la mécanique constructive temporellement sous-jacente, les algorithmes eux, parcourent pas à pas les arbres de propositions (PS) et de démonstrations (DS), ainsi que bien d'autres manipulations. Au final, les algorithmes établissent un résultat après de nombreux tests booléens réalisés sur leur parcours.

La 46eme fonction (la « prouvabilité ») peut aussi être écrite sous forme d'un algorithme qui teste l'arbre des preuves (DA), mais il n'y a pas de garantie de réponse, car l'algorithme peut tourner indéfiniment, contrairement aux 45 premiers algorithmes qui, fonctionnant par boucle limités, aboutissent inévitablement.

Ces algorithmes peuvent être vus comme la construction d'un parcours univoque à partir d'une valeur en entrée. On peut distinguer des parcours à plusieurs niveaux. Programmer dans une machine de Turing ou dans un ordinateur, c'est un parcours de la tête de lecture qui agit à chaque étape. A l'intérieur de ce parcours bas niveau, on peut reconnaitre des parcours intermédiaire. C'est un parcours sur les nombres (EC) produisant un parcours sur (EF) qui manipule quand cela se produit les textes (SL) « contenus » dans (SE). Si le nombre ne désigne pas un contenu symbolique (SL) le résultat rendu est trivial. De même quand les algorithmes sont chargés de manipuler des « Propositions » ou des « démonstrations », on peut observer les parcours de l'algorithme dans les arbres (PS) et (DS).

L'algorithme est une manipulation pas à pas basé sur des parcours et des calculs. Vu au niveau élémentaire d'une programmation machine, il n'y a qu'une sémantique élémentaire, mais vu au niveau de sa programmation en fonction imbriquée, les algorithmes possède des sémantiques intermédiaire : des parcours, des manipulations. La mise en évidence de ces « sémantiques» sera le point d'appui de notre observation du théorème de Gödel. En repérant les algorithmes en jeu dans les phrases, on pourra distinguer des phrases qui se ressemblent, mais sont très distinctes. La sémantique algorithmique des phrases symboliques (PS) permettra leur traçabilité. L'écrasement « tout-en-un » ne permet pas cette perspective. L'angle de vu algorithmique nous permettra de démasquer une curieuse identification entre deux phrases de PME dont l'une sera un algorithme et l'autre le résultat de cet algorithme.

FS – Fonctions traduite en symboles - Ces fonctions peuvent aussi être écrites dans le langage du système formel qu'on étudie : Principia Mathématica avec les primitives et axiome des entiers qu'on notera PME. On pourrait faire de même avec un autre système équivalent. La traduction repose sur des mécanismes élémentaires. On ne réalisera jamais une telle traduction en pratique parce qu'elle produirait d'immenses phrases très difficiles à rendre intelligible, n'utilisant que les 7 symboles de base et les variables. La manipulation de ces fonctions dans une écriture « à la Hilbert » (FH) rend la compréhension beaucoup plus accessible en construisant les concepts sémantique de façon étagée et symboliquement désignés par des noms suggestifs de primitives.
C'est le théorème V de l'article de Gödel qui permettra la traduction des phrases dans (FS). Nous reparlerons de ce théorème, car il concentre « en une fois » des informations qu'il est utile de mettre en relief.
Les fonctions (FS) sont des fonctions écrites dans PME. Elles analysent par un mécanisme de contrainte « tout en un » des vérités sur des nombres entiers. Pour la plupart des fonctions, il s'agit d'une lecture et d'une analyse des nombres par l'analyse du codage de Gödel : ces fonctions parviennent « à lire et manipuler » les textes (PS) au travers d'un nombre (PE) qui les « transporte ». Etant des fonctions numériques, tout se fait au niveau des nombres (EF) par les règles de divisibilité à

partir de la définition du produit (fonction numéro 1). Mais ce que ces phrases testent et produisent, ce sont les phrases contenues dans les nombres (quand il y en a une, sinon la fonction produit un résultat trivial).

FE – Fonction donnée par un nombre Entier – Toutes les fonctions pouvant être écrites dans PME (FS) qui est une sous structure de (PS), elles possèdent une correspondance avec un nombre de Gödel (PE). Ces fonctions peuvent ainsi être codées par un nombre de Gödel entier. On constatera que tout le raisonnement de Gödel se fait dans le cadre des entiers (EC) et des fonctions (FN). Il procédera par application de fonctions à des nombres. Les autres cadres sont des parallèles de nature interprétative, mais ce sont eux qui fourniront les raisonnements principaux.

FV-Relation de vérité – Les fonctions booléennes récursives(FN) définissent des relations de vérité sur un ensemble de variable entière. En effet, les 45 fonctions (FN) définissent soit une fonction numérique, soit une fonction booléenne. Ces fonctions sont toutes construites comme des algorithmes de boucles finies utilisant les fonctions précédentes. Au final le mécanisme élémentaire de contrainte est le test de divisibilité définit par la fonction numéro 1. Cette notion découle elle-même des axiomes des entiers de PME n'utilisant que la notion de successeur. Ainsi chacune de ces fonctions, construite par récursivité, peut être décrite comme un algorithme fait d'une imbrication de boucle au dessus de la notion de successeur. Cet algorithme est fonctionnel dans le sens où à partir d'un nombre entier, il construit soit un nombre soit une réponse booléenne (vrai ou faux).
La démonstration du théorème V montre comment transposer pas à pas cet algorithme en une contrainte « tout en une fois » (Plus précisément le théorème V transporte les fonctions récursives (FN) en contraintes symbolique (FS)). Chaque boucle conduisant à une variable et un quantificateur, la notion de successeur étant une primitive dans PME, la traduction est naturelle. On peut traduire chacun de ces algorithmes fonctionnels en une phrase symbolique de PME tout en conservant les variables de base de la fonction. Lorsque ces fonctions (FN) sont booléennes, on obtient une relation de vérité fonctionnelle au dessus des variables d'entrée. Chaque choix d'entier pour les variables en entrée conduit (par un procédé algorithmique constructif) à la réponse vrai ou faux. Le théorème V est le pivot de Gödel permettant la traduction d'une relation de vérité récursive en phrase de PME ; c'est-à-dire la traduction du vrai en affirmation syntaxique étudiable par la prouvabilité mécanique. Il méritera une observation approfondie. La notion d'algorithme sera notre point d'ancrage pour reconnaitre quelle phrase de PME est la traduction de telle question de vérité.
Ainsi les relations de vérité définies à partir des fonctions récursives sont reliées à des phrases de PME par une structure univoque (pour peu qu'on respecte le mode de leur construction définie par le théorème V, à savoir la traduction pas à pas de la sémantique algorithmique).

F0 – Entier symbolique - Chacune de ces fonctions est exprimable par un nombre entier (FE). Il est alors possible de re-coder ce nombre entier sous forme de symbole de PME par le procédé du successeur. L'entier est traduit en symbole sous la forme *ssss…s0* où il y a autant de *s* que le nombre entier à coder. C'est la façon naturelle

d'exprimer un nombre entier constant dans une phrase de PME. Il s'agit donc d'un codage symbolique dans (PS) d'une fonction symbolique de (PS) elle-aussi. Ce procédé repose sur un double codage : une phrase de (PS) dans (FE) rammener dans (PS), mais sous une autre forme (très simple). On passe de l'expression d'une contrainte à l'expression d'un nombre. On utilisera ce procédé sur des fonctions (FS). Ce codage des phrases par un entier symbolique va servir de pivot sémantique pour appliquer une fonction à elle-même. En effet, la possibilité de désigner un nombre sous forme de symbole, et les phrase symbolique sous forme de nombre, permettent de mettre sur le même plan nombres et symboles. Cela permet l'écrasement des deux notions sur un plan unique : c'est un ressort fondamental du raisonnement de Gödel.

On constate Ces 46 « fonctions » reposent sur une abondante superposition de structures, toutes distinctes. De plus, elles sont liées avec toutes les structures précédentes qu'elles parcourent au travers de leurs algorithmes (FA).

La plupart des raisonnements se feront au niveau des phrases bien formées de PME (PS) et de la recherche d'une éventuelle démonstration de ces phrases, c'est-à-dire d'un chemin (DS) partant des axiomes parvenant à ces formules. Mais il est sous-entendu que tout ce qu'on présente ainsi n'est écrit qu'avec des entiers (SE).

Le menteur

Dans la présentation de son théorème, Gödel dit qu'il a construit une situation qui s'apparente au paradoxe du menteur (Quand je dis « je mens » est-ce que je mens ? Toutes les réponses conduisent à une contradiction).
On retrouve la même situation dans le paradoxe du barbier. Je caricature ces deux situations en les comparant à une phrase du type « A=non A ». L'énoncé porte en lui le germe de la contradiction. Il est impossible qu'une telle phrase soit vraie car étant égale au contraire d'elle-même, vraie ou fausse, elle est nécessairement aussi le contraire. D'où une inévitable contradiction. Peut-on sensément définir A avec une phrase comme « A=non A » en s'interrogeant après sur sa vérité devant être unique.

- Dans le Barbier (schématique), la définition des liaisons est impossible. La définition vue comme contrainte intemporelle est fallacieuse. Le langage permet un tel énoncé contradictoire car il décrit les choses localement sans s'impliquer globalement. L'interprétation naturelle (un peu accompagné il faut dire, car il faut mener des pas dans un certain ordre) fait le reste. On peut dire qu'il s'agit d'une mauvaise définition car contradictoire (quand on l'interprète sous une perspective « tout en une fois », avant et après construction).
- Dans le Menteur, c'est à nouveau une lecture accompagnée qui produit la contradiction : c'est quand on applique « je mens » à lui-même qu'on en déduit qu'il dit la vérité, mais alors il ment en disant « je mens ». L'application de « je mens » à lui-même renverse la valeur de vérité. C'est la notion d'application qui est importante ici. On considère qu'il est normal et valide d'appliquer la phrase à elle-même.

Gödel va construire une phrase (qu'on nommera G) disant elle aussi quelque chose comme « G=non G ». Soyons un peu plus précis : Gödel veut étudier comment les

systèmes formels sont capable de certifier la vérité. L'objectif en étude à l'époque était le remplacement de « est vrai » par « est prouvable ». Il s'agit de remplacer la notion vague de vérité par quelque chose mécanique et fiable. « Prouvable » possède un sens mécanique précis : si on applique le procédé de construction de preuve du système formel, en partant des axiomes, on tombera sur la phrase à prouver. En étudiant cette question, on prend conscience que la notion de démonstration n'échappe pas au problème du menteur.
En remplaçant « est vrai » par « est prouvable », si on traduit la phrase A= « A est faux », on obtient G= « G n'est pas démontrable » et cette phrase pose les mêmes problèmes que le menteur. (Si jamais on trouve une démonstration de G, alors on trouve en même temps la démonstration que G n'est pas démontrable : impossible. Et à l'inverse si on trouve une démonstration de non G, on trouve une démonstration de (non« G n'est pas démontrable ») donc de « G est démontrable ». Or ayant trouvé une démonstration de non G, comment supposer que G est aussi démontrable ? C'est aussi contradictoire.
Tout cela n'a rien de très surprenant, « démontrable » porte bien l'idée de «vrai » et une phrase du type A= « A est faux » porte en elle-même la contradiction. La différence essentielle, c'est le transport de la « vérité » dans un contexte constructible, finitiste.

La question qui se pose est : comment Gödel a-t-il pu façonner un tel monstre sans commettre d'erreur ? Pour cela, il faut analyser en détail le procédé de construction. Mon approche ne me permet pas non plus de discerner une quelconque erreur dans la production de la phrase G. C'est une phrase assez complexe à construire, mais le procédé décrit est mécanique. Il n'est donné que par des instructions algorithmiques, car il serait bien trop long à réaliser effectivement. Mais l'algorithmique est clairement présenté. Il produit une longue phrase de PME (PS) utilisant les 7 symboles du système formel PME, et les symboles de variables. Elle possède un nombre très précis de symbole (difficile à calculer, et très élevé).

Si la phrase G est bien constructible en théorie, elle n'est pas sans poser de problème d'interprétation : comment peut-on nommer cette phrase complètement fixée d'un nom unique G et dire que cette phrase est égale à une seconde phrase de la forme « G n'est pas démontrable ». Pour écrire cette seconde phrase dans PME, il faudrait écrire G plus d'autres choses. La seconde phrase ne devrait-elle pas être plus longue que G ? La question possède une réponse claire : c'est le concept de substitution qui permet de faire ce tour de passe-passe.
On note Subst(P,x,y) l'action qui consiste à remplacer tous les symboles 'x' par des symboles 'y' dans phrase P de (PS). Pour construire la fameuse phrase G, on commence par construire la « fonction » Subst(X,y,X)). Cette fonction consiste à remplacer tous les y d'une phrase X par toute la phrase X (qui s'allonge donc énormément). Un petit peu de vigilance maintenant : quand on décrit ce mécanisme de substitution dans PME (comme ici d'ailleurs), X n'est pas une phrase, mais une variable. Il ne se passe donc rien dans cette seule définition. On pourrait dire que la phrase est 'à l'infinitif'. X étant une variable, il faut la remplacer pour que cette phrase soit active. Si on remplace X par une phrase de PME, l'exécution de la phrase produit une nouvelle phrase plus longue que la première (quand il y a bien des *y* dans la phrase). Pour être plus évocateur, on pourrait appeler ce mécanisme l'Auto-substitution et le noter

AutoSub(X) qui ne fait de remplacement que s'il y a des variables y libres dans la phrase X.

On construit alors dans PME une phrase P avec une variable libre *y* de la forme P=F(y)= « AutoSub(y) n'est pas démontrable ». Cette phrase exprime qu'à toute phrase y, on « peut » étudier si son auto-substitution est non démontrable.
On pose alors G=AutoSub(P). Celle-ci s'obtient en remplaçant les y dans P par la phrase P (avant remplacement). On obtient
G=« AutoSub(P) n'est pas démontrable ». Ce qui s'écrit aussi
AutoSub(P)= « AutoSub(P) n'est pas démontrable » ou encore
G=« G n'est pas démontrable».
(Dans la construction précise de Gödel, il n'y a pas d'interférence entre les *y* contenus dans AutoSub(X) et les y de la variable dans F(y) ; ce qui n'apparait pas clairement ici).

Et voilà expliqué comment construire une phrase du type G= « G n'est pas démontrable ». Mais on pas encore expliqué comment, dans PME, où les symboles sont fixés, la phrase de droite s'appelant G, peut contenir G avec d'autre chose en plus. La réponse est assez simple : G est de la forme AutoSub(P) et il y a deux façons d'écrire AutoSub(P) :

- Algorithmique : dans PME, on peut écrire la procédure algorithmique AutoSub(X) qui détaille l'algorithme AutoSub (comment se font les remplacements) en disant en plus que cette procédure « doit être » appliqué à P. (Tout cela sera exprimé par des contraintes entre variables).
- Résultante : Dans PME, on peut tout simplement écrire le résultat de cette application. L'application effective de la procédure AutoSub(X) à P, non en écrivant l'algorithme qui le permet, mais le résultat issu de cette application.

Dans la phrase [AutoSub(P)= « AutoSub(P) n'est pas démontrable »] , le AutoSub(P) présent dans le membre de droite est l'écriture « algorithmique » et dans le membre de gauche (qui en fait désigne la phrase complète de droite) on a le résultat de cette fabrication. On peut dire que le procédé est élégant : Gödel à construit un algorithme dont l'exécution reproduit l'algorithme initial… avec des choses en plus). Le résultat de l'exécution est donc plus long que l'algorithme ; et voilà où se cachaient les symboles mystérieux supplémentaires.

Notre vigilance préparée à distinguer les objets de natures différentes a repéré qu'il ne s'agissait pas du « même » AutoSub(P). Deux choses différentes sont écrites et leur égalité repose sur une « interprétation ». L'identification résulte de notre habitude à l'interprétation maximale. On ne laisse pas un algorithme prêt en fonctionner sans appuyer sur l'interrupteur de mise en marche. Et pourtant ici, il est primordial de distinguer la description de l'algorithme, de son exécution. Quand on écrit 5+3=4+4, on voit 8=8. Seulement ici, on est dans PME. Et l'on cherche à démontrer des phrases de PME. Il n'est par raisonnable de dire qu'on parvient à démontrer formellement la phrase G résultat d'un processus, en démontrant la phrase H qui n'est que l'algorithme de ce résultat, car entre les deux, il y a un grand fossé : une interprétation.

Comment se contredire

Dans PME, le fait que G= « G n'est pas démontrable » n'utilise pas les mêmes 'G' était indispensable à introduire d'autres symboles dans la phrase. A partir de l'astuce utilisée, on peut introduire n'importe quel symbole supplémentaire bien formé de PME : en posant P=« AutoSub(y) blablabla » puis G=AutoSub(P) on obtient G= « G blablabla ». On peut en particulier obtenir G= « G est faux » et donc rigoureusement le menteur. Mais la vérité n'est pas un phénomène claire, on ne peut rien en tirer sur la capacité des systèmes formels à être complet. C'est la « démontrabilité » que Gödel voulait étudier.

Ce constat donne un certain vertige. Comment peut-on construire des phrases aussi monstrueuses dans un système formel complètement univoque et mécanique. Ce système est-il contradictoire ? Non, il faut distinguer les démonstrations des phrases bien formées. Les démonstrations ne devraient jamais être contradictoires si le système est « potable » (cohérent). Par contre il est possible de construire des phrases fausses, des phrases curieuses. Et si tout va bien, on ne devrait pas pouvoir démontrer de phrases contradictoires.

La question que pose Gödel est aussi : les phrases sont-elles toutes 'vraies ou fausses' ? Et comme l'exige la rigueur voulu, il le fait au travers de l'outil mécanique du système en reformulant en 'démontrable ou réfutable' (réfutable signifiant : de négation démontrable). On attend parfois souvent dire que la phrase G de Gödel est vraie. Cette affirmation n'a rien à voir avec la démonstration, mais avec une évidence : la démonstration de G produirait une contradiction, on ne peut donc pas la démontrer. Comme c'est justement ce qu'elle affirme, elle est donc vraie. Mais on peut aussi s'éloigner de cette lecture et penser que la phrase n'est tout simplement pas univoque, pas sensée, que c'est une phrase qui ne signifie rien.

Un argument peut jouer en faveur de cette dernière lecture : en effet, si on accepte le mécanisme d'identification comme valide, pourquoi se limiterait-on à une unique application unique du mécanisme d'interprétation. En effet, une fois qu'on a réussi à écrire G= «G blablabla», le G intérieur au membre de droite est la description d'un algorithme, une fois exécuté il donne «G blablabla», mais pourquoi ne pas l'interpréter à l'intérieur de la phrase une nouvelle fois pour obtenir G=«(G blablabla) blablabla» et encore une nouvelle fois, etcetera. Si l'on accepte le mécanisme d'interprétation en identifiant G-algorithmique à G-résultat, on n'obtient pas une seule égalité, mais une mise en miroir d'une infinité d'égalité. Avec un blabla bien choisit, il peut être caustique d'identifier une sémantique commune. Et puis après tout, pourquoi doit-on s'arrêter d'identifier ? N'a-t-on pas la possibilité de ne jamais s'arrêter ? Ne doit-on pas appliquer l'interprétation maximale… ? Faut-il alors créer un statut particulier à cet objet qui est égale à une phrase à sémantique infini… Avec un blabla comme G qui fait porter une négation à chaque interprétation, il y a un renversement de la vérité à chaque étape interprétative. Une phrase multivoque est-elle sensée ? Pour un monde mathématique garant de l'univocité, on observe là une curiosité…

Des phrases aussi surprenantes proviennent de la possibilité de construire sur soi-même, de s'appliquer à soi-même. La construction de la phrase G vu dans PME ne

pose pas de problème, elle est algorithmiquement bien définie à partir d'un socle dur. C'est sa sémantique qui pose problème. En plongeant tout le système formel qui étudie et qui est étudié dans l'unique monde des nombres entiers, Gödel a produit un cadre où une phrase peut s'appliquer à elle-même (modulo une interprétation). En identifiant les « presque pareils » (algorithme et résultat) comme égaux, on peut produire des rapports de sens aussi extravaguant que l'on aura d'imagination.

Le paradoxe de Richard

L'aporie de Richard exprime ce fait curieux : tous les réels définis par un procédé de construction fini peuvent être énumérés (par l'énumération lexicographique de leur phrase de construction par exemple). Seulement il est possible, une fois cette énumération réalisée, de construire la diagonale de Cantor de leur écriture décimale. Cela étant une définition finie, nous venons de donner une définition forcément nouvelle, car sinon elle serait contradictoire avec le tableau des décimales. D'où une contradiction avec l'idée de toutes les définitions finies.
Seulement tout cela n'est pas rigoureux, nous n'avons pas donné de cadre univoque à la « description » finis des réels. Cela pose des questions sur le langage lui-même. Sur la finitude, sur le sens, le pouvoir des mots, le processus de définition .... Qu'est-ce qui fait que dans le langage, on peut dire et ne pas faire « tous les finis ». Est-ce le langage qui cache quelque problème ou est-ce le problème qui est mal défini ? L'énoncé est suffisamment simple et le mystère suffisamment épais pour avoir envie de creuser.

La tentation de formaliser ce problème nous effleure. Or il se trouve qu'on possède un cadre rigoureux, pour refaire le même genre de chose, en montant même d'un cran dans la généralisation : le langage axiomatique des systèmes formels. Ils permettent d'englober toutes nos pratiques mathématiques. On peut énumérer toutes les formules bien formées en partant d'un socle d'axiomes et en développant un arbre selon des règles de construction, ce qui prend avantageusement la place de tous les réels bien définis.

Seulement pour construire une « diagonale de Cantor », il faut qu'un objet puisse se définir comme « contraire de » chacun (dont lui-même). Il faut un tableau à double entrée d'informations dont on pourra prendre le contraire de la diagonale. C'est là qu'intervient une idée profonde de Gödel : choisir une variable libre unique pour toute les formule (le *y :* le nombre 19 en codage de Gödel). Le tableau sera obtenu en substituant cette variable y dans toutes les formules possible par toutes les formules bien possibles (tant que le tout est bien formé). On obtient le tableau à double entrée NxN. Si un nombre *n* n'est pas une formule bien formée ou sans *y*, on ne remplace rien. C'est une idée de longue portée, car cela modélise le concept d'application d'une fonction à un objet. Ce qui permettra de former la nécessaire « application d'une fonction à soi-même » pour s'auto-évaluer de façon contradicoire sur la diagonale de ce tableau.

Il reste à construire la notion de « contraire de » pour construire une contradiction sur la diagonale. Dans le contexte de Gödel, le choix est sans ambigüité : on s'intéresse à la

« prouvabilité » de chaque case d'une cellule. Le contraire de la diagonale sera sa non-prouvabilité.

En fait, c'est plutôt dans l'autre sens que se sont présentés les concepts. Gödel voulait étudier la portée de la prouvabilité. Or la prouvabilité était complètement formalisable de façon finie dans le système formel, tout y est mécanique. C'est probablement la structure du menteur qui s'imposait d'abord comme questionnement possible. Mais comment faire porter l'estocade, avec toutes les contraintes qui s'imposent pour atteindre une manipulation rigoureuse. Jusqu'à ce que Richard apporte la largeur de Cantor en deux dimensions dont on avait besoin.

Inspiré de cette idée, on peut imaginer des tableaux à double-entrée remplis de « x démontre y » (ou autres), mais ce n'est pas suffisant car ce n'est pas homogène en vue d'une auto-contradiction. La solution est au travers de <l'application> d'un objet à un autre. Le nœud conceptuel de ce mécanisme est la substitution (l'application d'une fonction à un objet, de façon mécanique). En effet l'application laisse toute liberté à la sémantique qui relie une phrase à une autre. Le choix de la diagonale inverse peut porter sur n'importe quelle sémantique, y compris sur la « prouvabilité » souhaitée.

Ainsi la construction du « contraire de la diagonale » par le concept de prouvabilité se laisse aussitôt voir : « la case diagonale n'est pas prouvable ». Ce qui traduit dans le style du menteur donne Diag=« Diag n'est pas 'vrai' ». L'auto-contradiction fonctionnera en prenant une case nommée Diag dont le contenu sera « Diag n'est pas 'vrai' ». C'est possible car toutes les phrases sont à dispositions. tout ce dont on a besoin pour écrire une telle phrase est formalisable mécaniquement dans le langage formel. Ainsi, la phrase choisie pour définir la diagonale existera forcément déjà dans une colonne.

Pour cela il suffit d'exprimer les concepts de :

- « Prouvable » : il faut formaliser la démonstration, c'est un procédé mécanique, c'est réalisable.
- « Application » : il faut formaliser la substitution, c'est un procédé mécanique, c'est réalisable.
- « diagonale » : c'est le concept d'auto-substitution ou d'application à soi : il suffit de construire un cadre où l'on peut se voir à la fois comme algorithme et comme objet (les entiers)

A la case formant l'intersection de la colonne et de la Diagonale, on aura une case Diag qui dit « Diag n'est pas vrai ». Plus précisément Diag= « Diag n'est pas prouvable », c'est-à-dire le menteur en version mécanique de la vérité. Le tour est joué. Il reste à le mettre en forme.

Mais la mise en forme n'est pas aisée. En effet, le concept « prouvable » n'a pas de garantie de constructivité (l'algorithme peut ne pas finir). Dans ce contexte, une écriture simple ne produirait pas une sémantique fiable. Il faudra ruser en isolant finement tout ce qui est constructible de ce qui ne l'est pas et le tour sera joué.

Mais le tour est-il bien joué malgré tout ? Le prestidigitateur n'a-t-il pas détourné notre attention à l'instant crucial ? Une gêne de principe peut s'imposer. Une gêne issue de

notre analyse de la Diagonale de Cantor. Une question se pose : le raisonnement correspond à laquelle des deux versions possibles du « raisonnement diagonale »:

1- Celles où l'on pose « tout à la fois », l'objet et son contraire, de sorte qu'apparait une vraie contradiction. Ces définitions « tout en une fois » sont contradictoire dès leur énoncé. Difficile d'accepter un tel mode de définition.
2- Celles où l'on construit le « contraire de tous » dans un second temps, après avoir présenté les objets du tableau initialement. Dans ce cas l'objet construit est différents de tous les précédents. Il est l'ouverture sur une nouvelle réalité, sur une complexité plus grande que les constructions servant de support. Ce sens est construit au dessus de tous et à partir de tous les précédents.

Dans quelle situation sommes-nous ici ? Le tableau est établi constructivement dans un premier temps, indépendamment de la construction de la diagonale. Il semble que nous soyons dans la seconde version. Le tableau est constitué en tête de ligne comme en tête de colonne de tous les nombres entiers. Quand ces nombres possèdent une lecture symbolique par le codage de Gödel, on rempli les cases du tableau en substituant à la variable *y* dans la phrase de la tête de colonne, la phrase de tête de ligne. Tout cela est mécanique et peut-être effectué sans avoir à définir spécifiquement la diagonale.

Le problème est qu'une seconde remarque s'impose: la construction de la diagonale-inverse « Diag n'est pas prouvable » est une phrase qui se trouve rigoureusement déjà écrite dans une colonne. En effet, toutes les phrases finies sont énumérées. Et la diagonale inverse est exprimée de façon finie (dans PME). Mais alors comment à l'intersection de la colonne et de la diagonale, la phrase peut-elle dire quelque chose de différent d'elle-même? Se pourrait-il qu'on soit dans la version 1 ou l'on donne un objet fini auto-contradictoire ? Cette phrase diagonale-inverse n'a rien de nouveau, rien de plus complexe, puisqu'on a déjà tout. A-t-on bien pris l'inverse de la diagonale ? A-t-on vraiment construit quelque chose de nouveau au dessus de la structure établie. Un doute de principe s'impose.

C'est le doute qui a guidé ma recherche : si rien de nouveau n'est construit, comment un objet similaire à lui-même pourrait-il porter une contradiction dans un monde où les phrases sont complètement fixées symbole par symbole ? Pour y voir clair, il faut observer en finesse la nature des objets manipulés, le cadre et les méthodes de ces manipulations. Gödel veut étudier la portée de la prouvabilité dans les systèmes formels, il faut donc s'attentionner exclusivement aux conséquences formels. C'est-à-dire aux manipulations mécaniques. Et il faut éviter de parler librement, intuitivement, sémantiquement des objets manipulés. Il faut construire une preuve qui soit purement formelle, une preuve qui montre comment la phrase « dit le contraire d'elle-même » de façon mécanique par les seules règles manipulatoires du système formel.

Le doute se résume ainsi : comment pourrait-on être formellement contraire à soi-même ? L'usage de la diagonale de Cantor dans le théorème d'incomplétude de Gödel se présente comme diffèrent de tous les autres usages de la diagonale de Cantor : on a un cadre saturé (sans nouveauté) qui produit une différentiation de soi-même sans être contradictoire.

Dit crûment

On verra que pour établir la différence de la case diagonale avec elle-même, le raisonnement utilise l'interprétation : on identifie un algorithme à son résultat. Mais en interprétant, on passe la barrière du monde des « plans de construction » au monde des produits construits, du monde des algorithmes au monde des objets déployés. On réunit, en un seul, le monde qui étudie et le monde étudié. Or identifier, c'est confondre ; on se permet de transporter les affirmations de l'un à l'autre. En identifiant par une égalité A=non A, on peut faire porter des contradictions. Caricaturalement, je présente le théorème de Gödel ainsi :

- On construit une phrase G= non H. (plus précisément G= « H n'est pas démontrable»)
- On pose ensuite G=H en identifiant des choses différentes.
- Puisque maintenant on a G=non G, on affirme l'impossibilité d'avoir à la fois un tel G et celle de non G aussi. Donc la phrase G n'est ni vrai ni fausse, mais indécidable.

Après cette caricature, opérons un retour critique : pourquoi G et H (algorithme et résultat) serrait-il différents après tout ? Ce sont des phrases de PME différentes, mais en interprétant de façon complètement naturel l'une, on obtient bien l'autre. G correspond au résultat de l'exécution de l'algorithme H. Ce ne sont donc pas des phrases si « différentes ». Le nœud de l'analyse est bien situé ici. L'interprétation est tellement naturelle qu'on est en droit de s'interroger sur son mal-fondé. Pourquoi ne pourrait-on pas dire G=H. On écrit bien $5^2=25$. L'interprétation, et particulièrement l'application d'une fonction est un des fondements des mathématiques. C'est une possibilité de manipulation qui se doit juste d'être cohérente et qui l'est en général. En vertu de quoi, ne le serait-elle pas ici ?

Pour y voir clair, l'algorithmique s'invite à grand cris. En effet toute la construction de la phrase de Gödel et de nature algorithmique, on pourrait en écrire le programme. Or dans le contexte algorithmique, la différence entre écrire et exécuter un programme est évidente. En observant le théorème sur cette strate plutôt que celles des affirmations conceptuelles, il apparait clairement que les deux phrase G et H très distinct au plus formel sont considéré comme identique au plan conceptuel, alors qu'entre les deux il faut une exécution qui justement change la valeur de vérité de la phrase.

C'est une question de cadre de manipulation. En mathématique on peut accepter toute pratique univoque. Seulement tout n'est pas pertinent. En cherchant à prendre du recul, je vais proposer plusieurs arguments estimant que l'interprétation n'est pas sensément recevable dans le cadre où elle est exécutée.

Algorithmique symbolique de l'application à soi-même

Ouvrons une petite parenthèse qui possède son pesant de sens : la compréhension de l'auto-substitution par une mise en relief des manipulations passées sous silence. Cherchons à comprendre ce qui rend possible l'application d'une fonction à elle-même, d'un point de vue constructif, puis d'un point de vue interprétatif. Si on analyse

comment Gödel a rendu possible l'application d'une fonction à elle-même dans le cadre symbolique, il faut y reconnaitre plusieurs mécanismes de codage et d'interprétation.

Il y a d'abord le mécanisme central du codage d'une fonction qui permet d'exprimer une fonction symbolique (FS) sous la forme (F0). En procédant à cela, on transforme un algorithme en une valeur d'entrée par l'application d'un algorithme.

La notion de variable, aussi, est centrale. Parce que l'usage de la variable accepte une indétermination sur les contenues qu'elle peut recevoir. Une fonction exprimée symboliquement (FS) utilise des variables désignées par des symboles (des nombres dans le codage de Gödel). Ces variables sont d'abord des symboles dans une phrase. Puis quand on les interprète, elles sont les porteurs abstraits d'un contenu. Il est sous entendu dans le contexte de cette démonstration que ce contenu doit être un nombre, mais il n'est pas spécifié sous quelle forme ce nombre doit être accepté. Il y a beaucoup de « sortes » de nombres, de nature très différentes dans le raisonnement :

- un nombre abstrait, c'est-à-dire une structure qui possède toutes les propriétés arithmétiques et toutes les structures de réinterprétation compatible (c'est notre concept le plus classique de nombre).
- Un simple successeur de 0 : c'est aussi un nombre abstrait mais son seul schéma interprétatif est d'être un successeur de 0.
- Un nombre abstrait factorisé : il existe dans l'identification d'un nombre avec son produit de facteur un mécanisme interprétatif important, la structure de la multiplication, la notion de produit de facteur...
- Un successeur de 0 écrit symboliquement par ssss…s0.
- Un nombre écrit par les symboles qu'il porte dans son codage de Gödel qui suppose l'interprétation de ce codage.
- Etc.

Le passage d'un type de nombre à un autre est une navigation entre des structures non élémentaires. L'indétermination de la notion de nombre rend cette navigation non explicite. C'est ainsi qu'à lieu l'auto-substitution : une fonction *f* dans (FS) vu comme un nombre *n* de (FE) peut être appliqué à une de ses propres variables (symbolique) en substituant le symbole de cette variable par les symboles du nombre *n* exprimée par le codage (F0). Ce qui produit une nouvelle phrase symbolique *f'* dans (FS).
Etablissons le relief algorithmique des étapes nécessaire à ce passage : la fonction *f* exprimée dans (FS) a besoin d'être traduite en nombre de Gödel factorisé *n* (EF) par un procédé algorithmique qui « remplace des symboles par des puissances au-dessus d'une liste de nombre premier » (c'est le codage de Gödel). Ce nombre de Gödel *n* une fois constitué doit être traduit en nombre linéaire *n* (EC) par le calcul du produit des facteurs. Ce nombre peut alors être traduit par un algorithme qui, en égrainant les successeurs, forme les symboles *sss...ss0*. Il faut alors substituer ces symboles dans la phrase par un algorithme qui exprime la nouvelle fonction *f'* (il faut reconnaitre les variables libres pour effectuer les remplacements). Et pour finir calculer le nombre de Gödel de cette nouvelle phrase symbolique.
La phrase ainsi formée possède une signification (une interprétation) : elle applique son algorithme à ce nombre sss...ss0 au lieu de l'appliquer à une variable indéterminée. Si

l'on voulait « exécuter l'algorithme » que décrit la phrase ainsi constituée, on voit que c'est la structure (EF) du nombre *n* et non sa structure (F0) dont on a besoin, pour lire son « contenu » symbolique. Ainsi, il faut réaliser exactement le chemin inverse de ce qui vient d'être fait pour exécuter l'algorithme de cette phrase *f'* : reconstruire la phrase symbolique (FS) à partir de *n* (F0). On remarquera l'asymétrie des algorithmes : la décomposition en facteur premier est un algorithme plus complexe que le calcul des facteurs. On peut constater ainsi que l'écriture (F0) n'est qu'un moyen conventionnel de placer une valeur précise dans une phrase symbolique afin de la désigner comme un substrat sur lequel on teste des contraintes. Tout ce travail algorithmique permet de passer de *f* à *f'* pour accomplir ce qu'on fait en général par des parenthèses f(f) ou des guillemets quand on applique f à <f>.
Cette pratique est un jeu d'interprétation entre les structures en jeux. Ce qui nous conduit à voir que les choix d'écritures sont des conventions symboliques parlant de ce qu'il faut faire. En pratique aucun algorithme n'est exécuté, tout est sous-entendu dans la manipulation de la variable et dans la convention de lecture des phrases symboliques.

Notre but était de voir comme la simple écriture d'une application à soi-même passe au travers de toute une chaine d'interprétation, autant à la construction symbolique de la phrase qu'à l'exécution (qui n'est qu'interprétativement sous-entendu, car non exécuté).

Non univocité de l'interprétation :

Nous verrons que les phrases de PME utilisées posent des problèmes de sémantiques. C'est un problème d'associativité sur les regroupements sémantiques dans la phrase. Comme on l'a vu en (FA), les phrases utilisées décrivent des algorithmes sous un mode « tout en un ». Les phrases ne sont pas construites sur l'application d'un seul algorithme mais sur un enchainement d'algorithmes, lui-même appliqué à des phrases. Tout étant écrit dans PME, on obtient une écriture du genre E[F[G]]. Ou chaque morceau de phrase E,F,G est faite de symbole exprimant un algorithme distinct. Je note avec des crochets E[F] pour dire que l'algorithme E est relié à son contenu F par des contraintes sur des variables intermédiaires; l'algorithme E est donc explicitement exprimé par des contraintes et le substrat F d'application aussi ; c'est une variable qui exprime la contrainte d'application entre eux. Tout cela est écrit avec des symboles qui se suivent dans PME.

Si comme cela se fait communément en mathématique ($5^2 = 25$), on accepte l'identification d'une exécution d'un algorithme à un résultat, alors une question se pose : en vertu de quel critère choisira-t-on l'interprétation E(F[G]) ou E[F(G)] ou même E(F(G)) ? Les parenthèses signifie ici qu'on exécute l'algorithme et donc qu'on remplace la phrase A(B) par le résultat de l'exécution de l'algorithme A sur B. Chacune de ces trois phrases produira des résultats différents, c'est-à-dire des phrases de PME différente.

Caricaturalement, prenons E= « Lire.. » en prenant F= « Changer les lettres 'o' en 'a' dans… » et G= « Toto est au dodo ». Dans ce cadre, E(F[G]) correspond à un ordre de modifier des lettres dans une phrase. E[F(G)] correspond à un ordre de 'lire que ma tante est à cheval'. E(F(G)) peut éventuellement poser le problème de la première

interprétation à effectuer E ou F ; le plus 'logique' est d'interpréter F avant, ce qui informe que 'ma tante est à cheval'. Au fait, où est passé Toto ? Si on remplace E=« Lire () » par E=« Comment exécuter () ». On comprendra encore mieux que la question « Comment exécuter (Changer les lettres 'o' en 'a' dans (Toto est au dodo)) ? » n'a rien avoir avec la même phrase où le mot « exécuter » est appliqué, qui donne « Comment Tata est au dada ? ». La phrase E ayant été 'appliqué' dans une partie de sa sémantique, le mot 'Comment' ne porte plus du tout sur la même sémantique ; le premier s'interroge sur le mode de manipulation de phrase alors que la nouvelle question ne parle plus du tout de linguistique, elle change de registre. L'application d'un procédé manipulatoire de phrase peut produire un nouveau sens qui n'a rien de commun avec le précédent ; en remplaçant les structures linguistiques, on peut produire un sens très différent.

Il peut arriver, et c'est le cas dans le théorème de Gödel, que l'application de A(B) redonne un résultat de la forme C[D]. Faut-il à nouveau appliquer l'interprétation ? Identifier un algorithme à son résultat n'a rien de naturel. On constate que de nombreuses possibilités interprétatives se présentent. Ce problème ne se pose pas dans les cadres mathématiques habituels, parce qu'il existe une projection commune entre toutes les interprétations. « L'exécution d'une fonction » y est un procédé transitif. Toute « la classe d'équivalence des interprétés » se projette sur un unique élément dans un ensemble déterminé. Mais ici l'interprétation n'a aucune fin puisque la phrase construire à chaque étape un nouvelle algorithme interprétable… L'interprétation donne des résultats qui affirment des vérités contraires à chaque étape… Ici, la signification des phases peut changer, le sens n'est pas garanti par le procédé d'exécution... Ici, les choix de césure entre algorithme et substrat modifie la sémantique… Dans ce cas, est-on dans un cadre où l'interprétation automatique possède un sens pertinent ?
Quand on « exécute » l'algorithme H pour trouver G, on a réalisé un choix d'interprétation idiosyncrasique (il semble peut-être le plus naturel car « on applique la fonction une fois » comme dans une pratique ordinaire. Seulement, beaucoup d'autres choix d'interprétation auraient pu être faits). Voilà posé l'épineux problème d'accepter d'identifier les algorithmes à leur exécution.

Ce constat ouvre un débat, plus large encore, sur la sémantique des phrases de PME dans ce contexte : ces phrases décrivent des algorithmes qui peuvent donner des résultat différents, selon l'interprétation qu'on en a, selon la segmentation que l'on fait entre la partie algorithme et substrat. Ce problème provient du fait qu'on étudie des phrases de PME à l'aide de phrase de PME qui ont le même symbolisme, rien ne distingue la fonction du substrat.

Pourtant Gödel, en utilisant le formalisme de PM dispose bien d'un moyen de distinguer algorithme et substrat, et il l'utilise. Nous l'avons croisé en détail : les algorithmes sont exprimés avec les symboles de PM porteur d'un sens de liaison et les substrats par une forme codifié neutre de tout autre sens qu'un chiffre (F0). Seulement, et c'est justement là que la bas blesse, Gödel va utiliser une césure non naturel : sur une phrase de type E[F[G]] où E et F sont des algorithmes alors que G est clairement un substrat de nature (F0), Gödel va construire E[F(G)] qui est loin d'être l'interprétation la plus naturelle. C'est

ce qui permet de produire le sens contraire de l'affirmation initial (Nous commenterons cette pratique. Dans la référence [1], elle est réalisée en [15-16]).

C'est le cadre d'auto-étude de PME par PME sans séparation entre la cadre d'étude et l'objet étudié qui produit le problème. C'est l'absence de séparation entre action et support. Voilà les conséquences de la mise à plat du cadre d'étude et de l'objet étudié. Que fait-on liant le cadre d'étude et les objets étudié, est-on toujours en train d'étudier un objet ? Ou bien est-on seulement en train d'observer les conséquences amusantes d'un mélange de sens du à la relativité interprétative. Voilà l'origine de l'indécidabilité.

Le dépassement de la constructivité ou du sens ?

Dans la ligné de « existe-t-il une sémantique naturel pour ces curieuses phrases de PME (G ou H) ?», on remarquera que de telles phrases correspondent à des algorithmes qui s'applique à des substrats où les substrats sont eux mêmes des algorithmes et les résultats aussi. Donner une sémantique à ces phrases est délicate à cause de la césure action-observation. Elle serait possible en codifiant cette césure. Mais il y a une difficulté supplémentaire : si les algorithmes étaient tous d'exécution fini, on pourrait appliquer un algorithme et, une fois le résultat acquis, appliquer le suivant. Seulement tout porte à croire que ces exécutions seront infinies. Que dire alors de l'algorithme suivant qui dépend d'un résultat que l'on n'aura jamais. Une telle phrase possède-elle un sens. En tout cas pas sur le plan algorithmique. Ces phrases sont fabriquées à partir d'algorithmes qui ne finissent pas et pourtant utilise les résultats au travers de variables intermédiaire. Est-il sensé de construire un tel dépassement de la signification algorithmique originel des phrases. En fait, Gödel raisonne dans un cadre « tout instantanément », rien de ce qui est dit ici sur les algorithmes n'apparait dans un tel cadre. Dans un cadre « tout en un », quand un algorithme ne fini pas, cela se fait malgré tout instantanément (… ?) et il semble logique a beaucoup que l'on possède bien une réponse qui dit : il n'y a pas de contrainte réalisé. Seulement, il faut comprendre qu'en faisant cela, on opère un changement de plan sémantique. Ce n'est plus l'algorithme lui-même qui établi la non existence par des tests finis montrant l'impossibilité. C'est la non finitude de cet algorithme. Et rien d'univoque n'est porteur de cette information. Il s'agit d'un saut interprétatif. Il faut sortir du cadre algorithmique pour donner la réponse. Intuitivement on peut avoir l'impression qu'il s'agit du même raisonnement : « on a testé, on a pas trouvé, on a la réponse ». Mais en pratique, aucun algorithme ne peut donner ce résultat. C'est un regard extérieur qui voit le « tout en un » accompli et non pas une preuve interne, il s'agit donc bien d'une interprétation supérieur qui attribue un sens. Il n'y a aucun accès par des liens univoque à une telle réponse : la question même du non-fini pose une question d'univocité. La répétition est interprétative, alors que dire de répêter jusqu'au bout, alors qu'il n'y a pas de bout. Ainsi apparait à nouveau l'écrasement issue du contexte « tout en un » qui met sur le même plan des réalités très distincte par une analogie interprétative. Affirmer qu'on possède la réponse si ça ne répond pas à l'infini, n'a pas d'autre sens qu'une analogie avec le fini.

Une telle pratique est bel et bien possible. Cela forme de toute évidence un cadre non contradictoire. D'ailleurs comment pourrait-on contredire un tel point de vu ? C'est la liberté des cadres interprétatifs… Cependant, il faut être conscient du saut interprétatif réalisé ; il se produit un vrai non-sens algorithmique. En faisant cela, on entre dans un

monde interprétatif qui ne repose plus sur des liens univoques, mais sur une interprétation de l'infini, certes non contradictoire. C'est un ajout structurel possible qui dépasse l'algorithmique native. C'est un monde qui repose caricaturalement sur une idée « d'algorithme tout en un » qui a du sens au-delà de l'in-fini, puisqu'il s'agit de l'infini achevé (on remarquera l'oxymoron révélateur de la divergence interprétative).

Comme nous l'avons expliqué, il me semble pertinent de ne voir dans cette interprétation supérieure qu'un sens manipulatoire. Mais celui-ci transmet intuitivement une réification illusoire à des phrases parlant de réalité inaccessible. A moins de croire à la réalité de ce « monde du dépassement », on est en gêne devant l'interprétation d'une telle phrase. Mais on peut tout aussi bien se passer de cette interprétation et se contenter de manipulation. Seulement la question revient avec encore plus de force : quel est le sens porté par cette manipulation. En dehors d'une manipulation qu'on s'autorise en posant un cadre manipulatoire, de quoi parle-t-on au juste dans cette fameuse phrase de Gödel ? Quel est donc cette interprétation que l'on fait à l'issue de la démonstration ? Au niveau de la conclusion, n'existe-t-il pas une certaine confiance interprétative qu'on réintroduit alors qu'on l'avait évacuée pour manipuler ?

Problème extérieure à la question

On peut résumer le problème assez simplement. La raison de non validité de l'interprétation qui identifie deux objets distincts est située dans les intentions de la démonstration : des mathématiques univoques ne peuvent pas construire un objet différent de lui-même ; c'est exactement contraire au sens du mot « différence » en mathématique. Par Gödel, on constate que la construction de deux objets différents mais « presque égaux » est possible dans PME (ce que j'ai nommé les phrases G et H), on les unit. Une contradiction ([1] paragraphe 1 p.129) est alors établie en montrant que l'objet est à la fois différent (car il y a des symboles en plus) et égale (si on l'interprète on obtient la même phrase). Peut-on dire qu'un tel procédé est correct ? Le problème est que pour en arriver là, on n'utilise que des procédés mathématiques corrects face à toutes nos pratiques habituelles des mathématiques. C'est une fois mis ensemble que les procédés (interprétation de l'application comme égalité, application à soi-même) produisent une mise à l'écart de soi-même.

On peut voir plus en détail comment est construite la contradiction : il s'agit de découvrir si une certaine phrase G, assez curieuse, peut être prouvée ou réfutée. Cela revient à chercher s'il existe-t-il un chemin qui part du socle des axiomes et qui, en parcourant l'arbre des démonstrations, aboutit à G ou à 'non G'. Ces phrases G et 'non G' sont des phrases complètement définies de PME, au symbole près. Le procédé doit donc aboutir. Seulement le raisonnement utilisé ne cherche aucunement à trouver ces symbole dans l'arbre des démonstrations. Au contraire, le raisonnement est le suivant : si jamais un chemin aboutit à G, G est démontré, donc vrai. Or, G dit que H ne peut pas être démontré, donc puisque G et H sont pareils, G ne peut pas être démontré. A deux reprises (les phrases soulignées), on a utilisé la sémantique et non la mécanique du système. On retrouve ces deux passages sémantiques dans la démonstration de Gödel :

- la seconde (G et H identiques) à lieu dans la ligne d'égalité [13 - p128], en particulier la première égalité où l'on interprète une phrase sensé être un substrat . (Ce résultat est réutilisé quand on interprète une unique et même phrase de deux façons différentes en utilisant une fois [9-10] et une fois [15-16]).
- La première (G et H différents) à toujours lieu dans les égalités [13] dans le sens où des modifications successives basées sur l'interprétation établisse une différence, mais elle n'est consommée qu'au raisonnement ultérieur [paragraphe 1 p129], quand manifestement on a produit deux phrases opposées et donc une contradiction. On détaillera tout cela dans l'analyse fine du théorème.

Ainsi on a construit deux phrases de PME différentes G et H (rappelons qu'il semble impossible de faire autrement pour obtenir G= « G blabla » dans un cadre formel), on les identifie comme identique selon un procédé mathématiquement très naturel. On puise l'égalité dans l'interprétation « naturel ».Mais dans le seul but de dire: impossible d'être identique car elles sont différentes. On puise la contradiction dans la différence des phrases, dans les symboles qui existe « en plus » dans G: « est non démontrable ».

Tout cela pour dire que c'est par la sémantique qu'on pose l'égalité et la non-démonstration effective de G. A aucun moment, on ne cherche la présence ou non des phrases dans l'arbre des démonstrations (DA). On montre qu'ils ne peuvent exister par un raisonnement interprétatif sur soi. Il ne s'agit pas d'une démonstration formelle qui repose sur la mécanique de la démonstration dans les structures en dur établies, mais une démonstration sémantique qui repose sur la construction de deux objets qu'on définit comme étant différent et égaux en même temps au travers de raisonnements qu'on « définit comme valide ». C'est un « problème extérieur » à l'arbre des phrases démontrables. C'est un problème de « construction d'objet » dans un cadre qui permet de produire une « sorte de contradiction ». Ca rappelle étrangement la version 1 de la diagonale de Cantor que nous avons vu dans la première partie.
C'est le cadre et les pratiques « définies comme valides » qui forment la source de la démonstration. La chose n'apparait pas comme choquante parce que chacune des pratique pris isolement est des fondements de notre pratique mathématique usuelle. Mais vu avec du recul (en observant les objets comme des schémas et des constantes neutres de toute notion de vérité), le procédé qui consiste à fabrique un objet puis à affirmer c'est égal et c'est différent en même temps est difficile à qualifier de pertinent. C'est quand on observe la sémantique localement, qu'on est aspiré par le raisonnement contradictoire, comme pour le menteur. Mais l'évacuation du concept de vérité dans la structure des objets mathématiques, l'observation des seules manipulations formelles permet de prendre une distance vis-à-vis de cette aspiration (interprétation automatique, identification naturelle). Le cadre (le plongement des phrases dans les entiers permettant l'auto-application), les pratiques (l'identification validée) et le raisonnement (la contradiction) sont un cocktail produisant la multivocité, l'insignifiance, le non-sens, l'amusement, le vertige, le jeu,… (On choisira le mot selon son gout). C'est l'habitude culturelle des concepts en jeu qui lui donne tant de force.

La contradiction sur les objets en dur n'arrive que lorsque qu'on raisonne à plusieurs niveaux interprétatifs et qu'on identifie les niveaux. PME seul comme langage d'étude d'un objet extérieur (dont il ne parle pas, dont il est séparé par construction) ne produira

pas ce genre de « contradiction ». C'est le cadre interprétatif plus riche posé par Gödel qui le permet. Ce qui permet de construire la contradiction, c'est :

- Un cadre ou les substrats et les mécanismes algorithmiques ont une syntaxe indifférenciées qui permet de les réunir sur un seul plan de lecture interprétative.
- Un cadre ou l'on peut appliquer les objets à 'une sorte de soi-même' et donc construire une phrase en miroir (par interprétation successive) qui donne le sentiment de similarité. Mais il n'y a pas encore de contradiction à ce niveau.
- L'identification de deux étapes différentes qui permet de construire une égalité de type A=non A. Qui est forcément contradictoire comme pour le menteur.

Si l'on considère comme distinctes les objets issue de niveaux d'interprétation différents, il n'y a pas de contradiction possible sur ce mode de construction.

Analyse du théorème

Nous avons décrit les difficultés que présente le théorème de Gödel de façon générale. Observons maintenant où ces difficultés s'incarnent précisément dans la démonstration. L'article du théorème de Gödel utilisé pour cette analyse est tiré de l'ouvrage [1] dont je reproduis ici les pages 125 pour le théorème V et des pages 127;128;129 pour le raisonnement auquel je ferai le plus référence.

des « Principia Mathematica » et des systèmes apparentés

42) $Ax(x) \equiv Z\text{-}Ax(x) \vee A\text{-}Ax(x) \vee L_1\text{-}Ax(x) \vee L_2\text{-}Ax(x) \vee R\text{-}Ax(x) \vee M\text{-}Ax(x)$,
x est un AXIOME.

43) $Cs(x, y, z) \equiv y = z$ Imp $x \vee (Ev)[v \leq x$ & Var (v) & $x = v$ Gen $y]$,
x est une CONSÉQUENCE IMMÉDIATE de y et z.

44) $Dm(x) \equiv (n)[0 < n \leq l(x) \rightarrow Ax(n\ Tr\ x) \vee (Ep, q)[0 < p, q < n$ & $Cs(n\ Tr\ x, p\ Tr\ x, q\ Tr\ x)]] \ \&\ l(x) > 0$,
x est une FIGURE DE DÉMONSTRATION (une suite finie de FORMULES dont chacune est soit un AXIOME, soit une CONSÉQUENCE IMMÉDIATE de deux des formules précédentes).

45) $x\ D\ y \equiv Dm(x)$ & $[l(x)]\ Tr\ x = y$,
x est une DÉMONSTRATION de la FORMULE y.

46) $\mathrm{Dem}(x) \equiv (Ey)y\ D\ x$,
x est une FORMULE DÉMONTRABLE. (Dem(x) est l'unique concept parmi ceux définis de 1 à 46 dont nous ne pouvons affirmer qu'il est récursif).

Le fait intuitif que toute relation récursive est définissable dans le système P (si l'on donne leur signification habituelle aux formules de ce système) se trouve exprimé précisément et *sans* qu'il soit fait référence à aucune interprétation des formules de P, dans le théorème suivant :

Théorème V. *Pour toute relation récursive $R(x_1, \ldots, x_n)$ il existe un SIGNE DE RELATION r à n-places (avec les VARIABLES LIBRES[1] $u_1, u_2, \ldots, u_n$) tel que, pour tous les n-uplés de nombres $(x_1, \ldots, x_n)$, on ait :*

$$R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \mathrm{Dem}\left[Sb\left(r^{u_1 \ldots u_n}_{Z(x_1) \ldots Z(x_n)}\right)\right], \qquad (3)$$

1. Les VARIABLES $u_1, \ldots, u_n$ peuvent être choisies arbitrairement. Par exemple, il existe toujours un r avec les VARIABLES LIBRES 17, 19, 23 ... etc., pour lequel (3) et (4) soient vrais.

DIATE ». k est dit ω-consistant s'il n'existe pas de SIGNE DE CLASSE a tel que

$$(n)[Sb(a^{v}_{z\,(n)}) \in \mathrm{Csq}(k)] \;\&\; [\mathrm{Neg}\,(v\ \mathrm{Gen}\ a)] \in \mathrm{Csq}(k),$$

où v est la VARIABLE LIBRE du SIGNE DE CLASSE a.

Tout système ω-consistant est, bien entendu, consistant. Mais, comme on le montrera plus loin, la réciproque est fausse.

Le résultat général concernant l'existence de propositions indécidables s'exprime ainsi :

Théorème VI. *Pour toute classe récursive ω-consistante k de FORMULES, il existe des SIGNES DE CLASSE récursifs r tels que ni v* Gen *r ni* Neg*$(v$* Gen *$r)$ n'appartienne à* Csq*(k) (v étant la VARIABLE LIBRE de r).*

Démonstration : Soit k une classe récursive ω-consistante quelconque de FORMULES. Nous posons par définition :

$$Dm_k(x) \equiv (n)[n \leq l(x) \rightarrow Ax(n\ Tr\ x) \vee (n\ Tr\ x) \in k \vee (Ep, q)\{0 < p, q < n \;\&\; \mathrm{Cs}(n\ Tr\ x, p\ Tr\ x, q\ Tr\ x)\}] \;\&\; l(x) > 0 \qquad \textbf{(5)}$$

(cf. le concept analogue 44),

$$x\ D_k\ y \equiv Dm_k(x) \;\&\; [l(x)]\ Tr\ x = y \qquad \textbf{(6)}$$

$$\mathrm{Dem}_k(x) \equiv (Ey)y\ D_k\ x \qquad \textbf{(6.1)}$$

(cf. les concepts analogues 45, 46)
Nous avons manifestement :

$$(x)[\mathrm{Dem}_k(x) \sim x \in \mathrm{Csq}(k)], \qquad \textbf{(7)}$$

et

$$(x)[\mathrm{Dem}_k(x) \rightarrow \mathrm{Dem}_k(x)]. \qquad \textbf{(8)}$$

Nous définissons désormais la relation :

$$Q(x, y) \equiv \overline{x\ D_k[Sb(y^{19}_{Z(y)})]}. \qquad \textbf{(8.1)}$$

Puisque $x\ D_k y$ (d'après (6) et (5)) et $Sb(y^{19}_{Z_{(y)}})$ (d'après les définitions 17 et 31) sont récursives, $Q(x, y)$ l'est aussi. Par

conséquent, en vertu du théorème V et de (8), il existe un SIGNE DE RELATION q (avec les VARIABLES LIBRES 17 et 19), tel que l'on ait :

$$\overline{x\ D_k\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]} \rightarrow \mathrm{Dem}_k[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)})], \tag{9}$$

et

$$\overline{x\ D_k[Sb(y^{19}_{Z(y)})]} \rightarrow \mathrm{Dem}_k[\mathrm{Neg}(Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)}))]. \tag{10}$$

Nous posons :

$$p = 17\ \mathrm{Gen}\ q \tag{11}$$

(p est un SIGNE DE CLASSE contenant la VARIABLE LIBRE 19), et :

$$r = Sb(q^{19}_{Z(p)}) \tag{12}$$

(r est un SIGNE DE CLASSE récursif contenant la VARIABLE LIBRE 17) [1].

Nous avons alors :

$$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = Sb([17\ \mathrm{Gen}\ q]^{19}_{Z(p)}) = 17\ \mathrm{Gen}\ Sb(q^{19}_{Z(p)}) = 17\ \mathrm{Gen}\ r \tag{13}$$

(en vertu de (11) et (12)) [2]; et de plus :

$$Sb(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(p)}) = Sb(r^{17}_{Z(x)}) \tag{14}$$

(en vertu de (12)). Si nous substituons désormais p à y dans (9) et (10), et considérons (13) et (14), nous obtenons :

$$\overline{x\ D_k(17\ \mathrm{Gen}\ r)} \rightarrow \mathrm{Dem}_k\ [Sb(r^{17}_{Z(x)})] \tag{15}$$

$$x\ D_k(17\ \mathrm{Gen}\ r) \rightarrow \mathrm{Dem}_k\ [\mathrm{Neg}(Sb(r^{17}_{Z(x)}))] \tag{16}$$

1. Puisque r est obtenu à partir du SIGNE DE RELATION récursif q par le remplacement d'une VARIABLE par un nombre défini, p.

2. Les opérations Gen et Sb, bien entendu, peuvent toujours être interchangées dans le cas où elles se réfèrent à des VARIABLES différentes.

De là suit :

1. 17 Gen r n'est pas k-DÉMONTRABLE[1]. S'il l'était, on aurait en effet (d'après 6.1) un n, tel que $nD_k(17\ \text{Gen}\ r)$. Donc, par (16), on aurait :

$$\text{Dem}_k[\text{Neg}(Sb(r^{17}_{Z(n)}))],$$

alors que d'un autre côté, la k-DÉMONTRABILITÉ de 17 Gen r implique celle de $Sb(r^{17}_{Z(n)})$. k serait donc inconsistant (et *a fortiori* ω-inconsistant).

2. Neg(17 Gen r) n'est pas k-DÉMONTRABLE. Démonstration : Comme nous venons de le démontrer, 17 Gen r n'est pas k-DÉMONTRABLE, c'est-à-dire que l'on a (par 6.1) :

$$\overline{(n)n\ D_k\ (17\ \text{Gen}\ r)}.$$

D'où il suit par (15) :

$$(n)\text{Dem}_k[Sb(r^{17}_{Z(n)})],$$

ce qui, avec :

$$\text{Dem}_k[\text{Neg}(17\ \text{Gen}\ r)]$$

est incompatible avec l'ω-consistance de k.

17 Gen r est donc k-indécidable, ce qui démontre le théorème VI.

On aperçoit aisément que la démonstration qui précède est constructive[2], c'est-à-dire que l'on a démontré d'une manière irréprochable d'un point de vue intuitionniste ce qui suit : Soit k une classe récursive quelconque de FORMULES. Alors si la FORMULE PROPOSITIONNELLE 17 Gen r (que l'on peut effectivement exhiber) est formellement décidable (sur la base de k), nous pouvons donner :

1. Par « x est *k-démontrable* », nous entendons $x \in \text{St}(k)$, ce qui, par (7), signifie la même chose que $\text{Dem}_k(x)$.

2. Puisque toutes les affirmations d'existence figurant dans la démonstration reposent sur le théorème V, qui, comme on peut aisément le voir, est irréprochable du point de vue intuitionniste.

Le théorème V

Le théorème V ([1] p.125) nous apprend que toute relation récursive (FV) peut-être traduite en un 'signe de relation', c'est-à-dire un entier (PE) qui est lui-même la traduction d'une phrase formelle de PME (PS). Par ce théorème, on possède un « traducteur » des définitions fonctionnelles à la Hilbert (FH) vers l'ensemble des entiers

naturels (FE) qui code des phrases de PME (FS) selon le mécanisme ingénieux de Gödel. Le théorème V possède d'autres dimensions, pour avancer dans une compréhension plus fine présentons le selon trois axes :

1-Il transforme une affirmation de relation de vérité (FV) issue des fonctions définies à la Hilbert (FH) en une phrase formelle de PME (FS). Cette relation (affirmation de vérité et d'erreur) peut dépendre de plusieurs variables.
Une relation de vérité récursive (FV) étant fondées sur des algorithmes récursifs (FA), il est possible de suivre pas à pas la construction de cette vérité finale à partir des valeurs de variable en entrée. La démonstration du théorème V consiste à suivre ce mécanisme pas a pas en transformant chaque étape algorithmique en son écriture symbolique « tout en un » dans PME (FS). Ainsi la phrase finale de PME obtenu produira une relation unique permettant de statuer sur la vérité et la fausseté de chaque valeur en entrée.

2-La construction pas à pas de ce mécanisme de vérité, est fondé sur des relations élémentaires de vérité qui sont prouvables (la fonction successeur, des constantes, des boucles d'exécution). Cela permet d'affirmer que la vérité obtenu par une telle relation avec des valeurs en entrée et aussi prouvable. En suivant pas à pas ce mécanisme de transmission de la vérité dans les fonctions élémentaires imbriquées, il est donc possible de construire des preuves de vérité ou d'erreur pour chaque valeur d'entrée. L'utilité est de confirmer la vérité d'une phrase de PME par la possibilité d'une démonstration formelle. La vérité et l'erreur pour chaque valeur d'entrée sont prouvables symboliquement. Nous ne nous étendrons pas trop sur cet axe du théorème, car ce n'est pas la vérité des phrases qui va nous importer en premier lieu, ce sont les sémantique des phrases. C'est donc l'axe 1, la traduction du fonctionnel vers le formel qui nous intéresse le plus. Par contre Gödel pour établir une preuve formelle se devait de prouver que la démonstration en vérité ou en erreur était accessible au travers des manipulations symboliques, c'est-à-dire formellement.

3-La traduction des phrases dans PME (FS) sous forme de contraintes peuvent être écrites sous un jour « fonctionnel » : quel que soit le contenu des variables dont dépend la relation R écrite à la Hilbert (FH), il existe un procédé conduisant à une unique phrase de PME (FS) qui en est la traduction. Et la relation de vérité (FV), fonction de plusieurs variables, a été traduite en une seule phrase dans PME (FS) tout en conservant les variables formelles correspondantes. On pourrait dire que les variables de la relation de vérité sont « transportées » à la relation fonctionnelle. On pourrait crire des phrase différente pour chaque entrée, il y aurait plusieurs façons de traduire une relation de vérité dans PME, mais le théorème V impose ce mode de conservation des variables et on verra que ce n'est pas anodin dans le raisonnement. J'évoquerai ce principe en disant que les phrases PME réalisées sont « fonctionnelles » (elles dépendent de variable) ou même « algorithmiques » (elles établissent un algorithme unique au dessus de paramètres en entrée).

La démonstration

Un des piliers de ce théorème repose sur le concept de *« démonstration »*. Gödel est parvenu à traduire le concept logique *«x démontre y »* où x et y sont des variables dans une phrase fonctionnelle (FH). Ce concept repose sur un algorithme (FA) qui parcours l'arbre des démonstrations (DA) et vérifie parmi toutes les démonstrations possibles (DS) en-dessous d'une certaine taille, si la phrase x est présente et si elle se termine par y (autrement dit que x est une démonstration de y). La construction de cette phrase dans PME (PS) repose sur la traduction par le théorème V d'algorithmes imbriqués (FA) définis dans les 45 fonctions de Gödel (FH).

La substitution

Le concept de substitution consiste à remplacer une variable par un contenu. Il est développé par Gödel dans une définition fonctionnelle à la Hilbert (FH). Si on décrit algorithmiquement (FA) le principe de substitution, il s'agit de parcourir la phrase substrat (le contenue de la variable) et d'y remplacer les occurrences de la variable libre nommée '19' dans le codage de Gödel par une suite de symbole donnée. Cette procédure de substitution étant récursive (FA), on peut construire une traduction de cette phrase dans PME (FS) par le théorème V.

Mais quand ce théorème V est utilisé, le remplacement de la variable par son contenu (une phrase de PME) ne se fait pas en remplaçant les variables par des phrases symboliques de type général (FS) mais par leur codage en symboles *ssss...s0* de type (F0). Ainsi Gödel nous donne le moyen de reconnaitre l'algorithme (FA) exprimé par codage de Gödel de ses symboles (FS) de la variable qui est exprimé par un double codage.La fonction *Z,* numéro 17, permet de faire cela [1, p.121]. Finalement ces symboles sont intégrés dans une phrase complète par le codage de Gödel (SE). Ainsi on reconnait la phrase substrat de reste qui constitue l'algorithme parce qu'elle est doublement codé.

En [8.1], Gödel construit « l'application à soi-même » de la façon suivante (on raisonne ici dans le cadre algorithmique (FA) s'exerçant sur une phrase formelle (FS)) : le mécanisme de substitution permet de remplacer la variable '19' par n'importe quel entier exprimé sous la forme ssss...s0 (en particulier si cet entier (FE) et celui d'une phrase (FS), la chaine de substitution sera de la forme (F0)). En prenant le propre numéro de Gödel (FE) de la phrase avec variable '19' (FS), la substitution donne une nouvelle phrase (FS) avec les symboles remplacés qui par le codage produit un nouveau numéro de Gödel (FE) qui n'est pas la même phrase qu'avant.
La lecture des symboles à partir du numéro de Gödel permet de « distinguer l'algorithme » écrit avec les 7 symboles et de nombreuses variables intermédiaires du substrat à qui l'algorithme s'applique, ce substrat étant constitué uniquement des symboles *s* (le numéro 3) et 0 (le numéro 1). Gödel défini ainsi le procédé d'auto-substitution *AutoSub(y)*, l'ensemble se résume par la fonction notée $Sb(y,^{19}_{,\,Z(y)})$.

Les affirmations [9-10] et [15-16]

Venons-en au lieu de l'identification contestée. En [9], la transformation de la relation de vérité *Q(x,y)* (FV) exprimant la fonction *«non(x démontre AutoSub(y))* » (FN) en une phrase de PME (FS) démontrable dans PME se fait au travers du théorème V comme nous l'avons expliqué. Analysons plus en détail cette affirmation [9], en veillant à bien identifier la nature de chaque objet et à constater si les algorithmes sont exécutés ou non pour chacun des concepts en jeu :

- Le membre de gauche aussi nommé *Q(x,y),* est une relation de vérité (FV) sur une affirmation fonctionnelle algorithmique (FA) avec deux entier x et y en entrée, elle affirme que « x n'est pas une démonstration de l'auto-substitué de y ». Les concepts en jeux sont des fonctions composées. Elles peuvent être exécutées pour connaitre une valeur de sortie. Si on dissèque les concepts en jeux dans Q, on remarque que la composition de trois fonctions, traductible en algorithmes (FA) :
  a) de démonstration, b) de substitution, c) de fabrication d'entier symbolique (la fonction Z).
- Les variables *x* et *y* écrite dans ce membre de gauche sont des variables qu'on pourrait appeler « fonctionnelles », elles ne peuvent pas passer dans PME (FS) sans être traduites. On a dit que la traduction par le théorème V conserve les variables, il se trouve que *x* et *y* seront traduites dans PME par les symboles 17 et 19. Ces variables *x* et *y* sous entendent, comme le font habituellement les variables, une affirmation de vérité pour n'importe quel contenu possible de chaque variable.
- L'affirmation [9] dit que si la relation de vérité *Q(x,y)* est vraie pour un certain couple d'entier (x, y) alors il existe une démonstration dans PME (FS) d'une phrase de PME (FS) qu'on va nommer D. Observons cette phrase D qui n'est pas écrite explicitement. Seul son procédé de construction est à peu près décrit.
- Dans le membre de droite les fonctions Sb et Z doivent « être exécutée » pour produire la phrase D à prouver. En aucun cas, les fonctions Sb et Z qui s'appliquent à *q* ne doivent être traduites algorithmiquement dans PME (FS). C'est le résultat de l'algorithme qui va produire D. Au départ seul q est dans PME (FS), le reste des symboles utilisé pour écrire ce membre de droite sont des fonctions (FN), qu'il faut donc exécuter pour avoir la phrase D (FS). Et le tout forme une affirmation fonctionnelle (FV).
  La dernière fonction est « *Dem* ». Il importe peu qu'on exécute ou pas cette dernière fonction. Il s'agit de l'affirmation que D est démontrable. On peut la voir comme une affirmation de vérité extérieure aux éléments durs qu'on est en train de manipuler. (Pour être plus précis, on devrait « exécuter » cette affirmation fonctionnelle et donc trouver un vrai ou un faux. Et la « vérité extérieure » est plutôt l'implication du membre de gauche vers le membre de droite. C'est plutôt à ce niveau que ce situe l'observation sur la structure en dur. Mais ces subtilités n'ont pas d'impact sur notre observation)
- La phrase D est donc principalement composée de la phrase *q*. Mais elle en diffère en ce qu'on a substitué (vu dans FS) toutes les variables de numéro'17' et '19' par les symboles *sss…sss0* (5.7) correspondants aux contenus des variables x, y. Vue dans (FS) la phrase D est donc composée des mêmes symboles que la phrase q à

l'exception des 17 et 19 qui sont remplacer par de très longues et très simples séries de symbole de ssss…s0. (Tout cela devant être traduit dans (FE) pour être plus rigoureux).

- Il nous reste à voir de quels symboles sont faits la phrase *q* vue dans (FS). Connaissant le fonctionnement du théorème V, on peut dire que cette phrase « contient » (sous forme de suite de symbole exprimant des contraintes) tous les algorithmes de la phrase fonctionnel de gauche Q(x,y) qui on été traduit en conservant « les variables x et y ». Ainsi dans *q* doivent apparaitre sous forme de contraintes « tout en une fois » l'algorithme de la démonstration, l'algorithme de la substitution et même l'algorithme de la symbolisation entière (la fonction Z). Et la dépendance des variables intermédiaire (servant de liens entre les entrée et les sorties des algorithme) doit coïncider avec la construction pas à pas de ces algorithmes dans la fonction de vérité Q(x,y). On est en train de dire que la composition des algorithmes (FA) utilisé pour définir Q(x,y) (FV) sont traduit par une transposition univoque conservant une trace identifiable dans PME (FS) de chaque algorithme (FA). Pour voir cela, il faudrait « désassembler » le langage de PME, pour reconstruire le langage algorithmique exactement à l'inverse du théorème V qui a « compilé » les algorithmes dans PME (en fondant les mots sur l'analogie qui existe avec la programmation informatique). A titre d'information, l'univocité de la traduction pourrait être garantie, mais elle ne l'est pas dans la démonstration de Gödel, tout simplement parce qu'il ne détaille pas de façon univoque le mécanisme de traduction. La démonstration du théorème V n'est qu'une explication de la « possibilité » de le faire. En fait Gödel aurait besoin d'un mécanisme univoquement décrit pour que la phrase *q* soit bien définie.
  Si on regarde les algorithmes apparaissant dans Q(x,y) du membre de gauche, on constate que l'auto-substitution utilise le mécanisme du double codage du contenu de la variable. Ainsi, si l'on parvenait à « désassembler » la phrase q comme on peut le faire pour un programme informatique en langage machine, on trouverait l'algorithme du double codage dans la phrase q.
- [9] et [10] ont quasiment le même contenu ; avec la construction d'un symbole *« non »* supplémentaire ajouter à la phrase D en (10) (C'est décrit au travers de la fonction Neg, et ce serait traduit dans PME par un simple symbole supplémentaire). De la même façon qu'on arrive à démontrer la phrase D quand la relation de vérité Q(x,y) affirme une vérité, de même en [10], l'affirmation contraire produit une démonstration possible de la phrase contraire. La phrase q est unique pour les [9] et [10], le mécanisme de démonstration est similaire

A la façon dont la fonction de substitution a été créée, et par la récursivité constitutive de ces mécanisme, les affirmations [9-10] peuvent recevoir n'importe quel contenu entier dans ses variables d'entrée x et y. En particulier le nombre *p* décrit en [11]. C'est un nombre (FE) qui vu dans (FS) est très proche de *q* : on lui ajoute deux symboles exprimant la généralisation pour tout *x*. Ce nombre *p* est utilisé comme contenu de la variable *y* (comme substrat) dans les affirmations [9-10], ce processus d'application à p conduit aux affirmations [15-16].

D'un côté, la valeur numérique de *p* importe peu (et donc son contenu sémantique non plus). Car p est un nombre-de-Gödel substrat. On va lui appliquer un algorithme récursif pouvant agir sur tout entier.

De l'autre côté, le contenu sémantique de *p* n'a rien d'anodin puisqu'il produit une sorte de contradiction ayant la forme de l'aporie du menteur : en appliquant le schéma [9-10] à *p*, la vérité de la relation Q(x,*p*) produit la démonstration d'une phrase « disant » à peu près le contraire de la phrase du départ (et respectivement pour la négation). Un raisonnement assez simple [p. 129] conduit ensuite à l'indécidabilité de la phrase *(17 Gen r)*. Mais l'indécidabilité n'est qu'une conséquence de ces affirmations contradictoire. Le problème interprétatif que je souhaite soulever se pose bien avant l'indécidabilité. C'est dans le paragraphe 1 [p. 129] quand sous l'hypothèse de prouvabilité de *p*, on obtient une contradiction. C'est cette contradiction qui est problématique. (On retrouve un deuxième usage du procédé interprétatif contestable dans le paragraphe 2, mais il ne conduit pas à une contradiction directe dans ce second cas). Nous allons détailler les lieux précis de l'interprétation contestée.

Non-univocité

En [15-16], Gödel préconise la substitution de *y* par *p* dans [9-10]. C'est une opération valide dans le sens où c'est un cas particulier de la valeur de variable *y e*t que la construction de l'affirmation [9-10] se fait indépendamment du contenu de y. Seulement, pour produire les affirmations [15-16], d'autres manipulations sont effectuées sur [9-10] que la simple substitution de *y* par *p*. En effet, le « groupe » *AutoSub(y)* noté $Sb(y^{19}_{Z(y)})$ n'a pas été remplacé par $Sb(p^{19}_{Z(p)})$ mais par *(17 Gen r)*. L'égalité permettant ce remplacement a été formulée en [13].

Je me propose d'expliquer qu'en effectuant ce remplacement, on a modifié le sens de l'affirmation [9-10] de façon non univoque. En plus d'une substitution, on a aussi effectué l'exécution d'un algorithme (une interprétation). C'est en observant le « contenu algorithmique » des membres de gauche et de droite qu'on aperçoit le « changement de sémantique » du à cette interprétation. Pour respecter l'usage du théorème V, l'algorithme complet (FA) devrait être transporté sous forme symbolique (FS) en conservant les mêmes variables. Or la transformation effectuée ici ne conserve ni les algorithmes, ni la variable *y* (ou son contenu). On a vu que le théorème V transpose les algorithmes d'un contexte (FV) à un contexte (FS). Et on a vu que ce transfert conserve les variables d'entrée de part et d'autre de la traduction.

Ce sont les égalités [13] qui produisent ces transformations. Une égalité en mathématique signifie qu'on a rigoureusement à faire au même objet. C'est le cas dans les égalités [13], si l'on applique à chaque membre « l'interprétation maximale » qui consiste à observer tous les résultats de ces expressions fonctionnelles complètement effectuées. Seulement les affirmation de [9-10] ne repose pas du tout sur une logique d'application fonctionnelle, mais sur un traduction d'algorithme(FA) dans un espace de propositions symboliques (FS). En effet, le théorème V transporte des algorithmes et non des résultats d'exécution (preuve en est qu'il conserve les variables). L'application

des égalités [13] va rompre cet usage du théorème V. Présenté sous la forme [15-16], les implications de la gauche vers la droite «suggère » l'existence d'une traduction naturelle d'un algorithme fonctionnel (FA) vers une phrase symbolique dans (FS) or il ne s'agit en aucun cas d'une traduction par le théorème V, mais au contraire de la production d'une phrase dans (FS) complètement contraire à la fonction d'origine. Cela repose sur une interprétation librement acceptée en [13] et complètement distincte de la traduction constructive du théorème V. La question qui se pose est donc la validité des égalités [13] : il y a validité au niveau de l'exécution maximale des algorithmes (ce sont des interprétations) …et encore c'est à voir en détail, la sémantique n'est pas univoque. Par contre il n'y a absolument pas égalité sur le plan des phrases symboliques qui correspond au cadre à étudié (rappelons nous qu'on étudie la démontrabilité d'une phrase précise).

Analyse de $Sb(p^{19}_{Z(p)})$

Le remplacement de *q* par *r* effectué dans le membre de droite de [15-16] est univoque à tous les niveaux, dans le sens où c'est un cas particulier de l'affirmation [9-10] et que vu ainsi, cette transformation ne produit pas de modification de la phrase D qui doit être démontrable. On peut en effet, dans les symboles de la phrase *q,* remplacer les 19 par le nombre *p* sous forme (F0)). Ainsi le membre de droite est un cas particulier de [9-10] conforme à l'usage du théorème V.
Par contre le membre de gauche de [15-16] est modifié. On a remplacé $Sb(p^{19}_{Z(p)})$ par *(17 Gen r)*. En faisant cela, on remplace un algorithme appliqué à *p*, par le résultat de cet algorithme. En plus fait important, l'algorithme effectué avec *p* en entrée, n'est qu'une partie de l'algorithme totale qui devait s'effectuer sur p. En effet, le théorème V nous parle de traduire un algorithme complet Q(x,y). La modification effectuée ne parle plus du tout du même algorithme.Traduit dans le langage précédemment présenté, Gödel a transformé le membre de gauche d'une forme E[F[p]] en sa forme E[F(p)]. On est face au problème de la transitivité de l'exécution.

Tout cela fonctionnerait très bien, si seul le résultat d'exécution finale nous importait. Seulement le théorème V n'agit pas sur le résultat, il agit sur les fonctions ou plus précisément sur l'algorithme qui s'applique à une variable. En exécutant une partie de l'algorithme dans le membre gauche, on transforme complètement les algorithmes présents dans ce membre de gauche. En effet, une fois transformé il ne reste plus en jeu que « l'algorithme de démonstration » appliqué à une phrase symbolique qui à la très forte apparence d'un simple substrat (17 Gen r) et x.
Une question pour enfoncer le clou : si on appliquait la théorème V à cette nouvelle affirmation fonctionnelle, comment devrait-on transporter (17 Gen r) dans le contexte (FS) ? Sachant que (17 Gen r) est déjà dans (FS), faut-il le transporter tel quel en conservant ses symboles (FS), ou bien faut-il le voir comme le contenu d'une variable et le transporter sous la forme d'entier symbolique *ssss…s0* (F0). Les phrases diffèrent complètement, dans un cas les algorithmes présent dans (17 Gen r), c'est-à-dire dans *q*, sont conservé, dans l'autre ils disparaissent au profit d'une constante entière. Gödel sous entend qu'on étudie la phrase (17Gen r) et donc qu'elle est un substrat et non pas

un algorithme. C'est l'interprétation logique parce qu'au niveau fonctionnel (17 Gen r) apparait comme un nombre.

Reprenons cela sous d'autres mots : Gödel a utilisé l'associativité de la composition fonctionnelle. Seulement, si F et G sont des algorithme, on a pas l'égalité FoG[n]=F[G(n)] dans PME, à cause de la différence de traduction entre algorithmes et résultats. Cette égalité n'est valable que pour les « résultats » et non pour les traductions d'algorithmes dans PME. Ici on a : F(y)=«On ne peut pas démontrer y », G(y)= « Autosub(y) » et n se trouve être le nombre de Gödel sous forme (F0) de la phrase FoG[y]. En procédant à cette interprétation, Gödel a posé librement la césure interprétative entre algorithme et substrat : il a tranché en plein milieu de FoG qui aurait du être un algorithme unique à appliquer à *n* selon le mécanisme du théorème V.

Ainsi en [15-16], il n'existe pas de traduction mécanique de la phrase de gauche vers la phrase de droite. Cela produit qu'il n'y a pas de démonstration formelle de cette implication. Il s'agit d'une interprétation entre un membre de gauche remplacé par un autre selon des égalités interprétatives. En procédant à l'interprétation de G(n) (remplacement par « son » résultat ; parmi plusieurs possibles d'ailleurs), le sens de la phrase devient le contraire du sens suggéré initialement. Cela passe de façon discrète parce que la nouvelle phrase n'est pas radicalement différente de la première ; en fait, c'est la même avec une négation de vérité en plus. On a l'impression d'avoir conservé tous les algorithmes en jeux, mais cela est une illusion du a la construction particulière de cette phrase dont l'exécution donne le contraire d'elle-même. Ce procédé appliqué à une autre phrase pourrait donner quelque chose de complètement différent.

Ainsi, le théorème V ne permet pas de passer de l'expression $x\ D_k\ [Sb(p^{19}_{Z(p)})]$ au membre de droite désigné. Mais il reste encore une possibilité de valider [15-16]. C'est de raisonner au niveau de la vérité au lieu de raisonner au niveau symbolique : le membre de droite de [15-16] est conforme à une bonne substitution de [9-10], il suffirait alors qu'à gauche le remplacement d'expression [13] conserve « la vérité » des affirmations fonctionnelles. Si les relations de vérité associées aux affirmations fonctionnelles

$$(\ x\ D_k\ [Sb(p^{19}_{Z(p)})]\ \ et\ \ x\ D_k\ [17\ Gen\ r])$$

ont les même valeurs de vérité pour chaque variable possible, alors les affirmations [15-16] restent vraies et satisfaisante. Mais là non plus ce n'est pas le cas. L'analyse est plus délicate que précédemment, parce qu'à gauche, nous sommes dans un monde fonctionnel. On a donc fortement tendance à « interpréter au maximum » pour apprécier la signification de ce qui est écrit. Et l'expression $Sb(p^{19}_{Z(p)})$ est d'une nature très ambigüe à ce sujet.

Si on « interprète » cette phrase, elle produit la nouvelle phrase (17 Gen r) dont la signification algorithmique est la suivante : « pour tout x, x non dem($Sb(p^{19}_{Z(p)})$) ». En interprétant la phrase, on reproduit le contraire d'elle-même. L'interprétation *de* $Sb(p^{19}_{Z(p)})$ ajoute une négation à la phrase initiale. Que dire de la signification d'une telle phrase, sachant que son interprétation n'a pas de valeur de vérité dans le sens où chaque niveau d'interprétation la renverse. On peut se contenter du premier niveau de lecture, ce qui est encouragé par la différence de nature, d'écriture et de rôle de *p* (on

exécute un algorithme et on « laisse tranquille » un substrat). Et toute la subtilité est là : pour interpréter $Sb(p^{19}_{Z(p)})$, il faut faire passer *p* du rôle de Substrat comme le demande le contexte [9] au rôle d'algorithme écrit sous forme (FS). Dans le contexte [9] la variable *y* (et donc son contenu *p*) n'intervient jamais dans la traduction vers (FS). En substituant y par p au contexte 9, il est claire que p est un substrat. Dans (FS) on l'écrit sous forme (F0). Dans (FV), il est une valeur d'entrée. Le remplacement de phrase [13] produit que la sémantique algorithmique de *p* devient « active ». On le voit clairement en car *p* est immédiatement remplacé par la forme 17 Gen q. Ce sont les symboles « contenus dans » *p* qui servent à former 17 Gen r. L'interprétation de p comme forme symbolique en [13] produit une utilisation de sa « sémantique algorithmique ». p est passé de substrat inactif à sémantique active, on l'a ressuscité d'entre les morts. Ce qui est en porte à faux avec l'algorithme initiale [9] où il devrait être inactif. Cette récupération d'une partie de la sémantique du substrat modifie la phrase jusqu'à produire le contraire de la sémantique initial. Or, à cause de la construction « en miroir » de $Sb(p^{19}_{Z(p)})$, les sémantiques initial et interprété produisent un algorithme quasiment identique qui s'appliquent au même substrat (avec l'inversion totale de la valeur de prouvabilité).

Confusion interprétative

Il est nécessaire de constater la confusion qui existe entre les différentes formes possibles d'un même entier : la forme symbolique (FS), la forme abstraite (FE) et surtout la forme très spécifique des entiers symboliques (F0). L'interprétation demande le passage d'une forme à l'autre, de (F0) à (FS), de substrat à « sémantique active ». Et cela transforme le sens parce que cela permet de produire la « même figure » d'une « nouvelle figure » : on voit apparaitre un « n'est pas prouvable » en plus. Il faut bien comprendre que dès l'écriture de [9-10], la confusion existe. On ne voit pas clairement dans le membre de gauche que *y* doit être vu comme une variable unique auquel on applique un algorithme unique. Et c'est sur cette confusion que se fait l'application de l'interprétation. Tout semble naturel, parce que le relief des interprétations possibles, des structures différentes en jeu est écrasé « en un seul ». Les intitulés *y* ou *p* sont vague, leurs formes (FS,F0,FN,…) ne sont pas précisés. Le rôle de *y,* comme variable unique d'un algorithme unique, est caché en [9-10] alors que fondamental pour l'usage du Théorème V.

En poursuivant le raisonnement de Gödel dans chacun des paragraphes intitulés 1 et 2. p.129, on retrouve les affirmations [15-16] utilisées comme argument de raisonnement. Et si l'on regarde leur usage, on constate que Gödel avait bel et bien besoin de l'interprétation formulée par l'écriture *17 Gen r.* L'interprétation qui aurait concordé avec le théorème V ne permettait évidemment pas la contradiction ; il avait besoin du « résultat » et pas de « l'algorithme » de *AutoSub(y)* pour produire la contradiction.

En prenant du recul, cela nous révèle qu'on ne peut pas faire porter une contradiction sans franchissement d'un niveau interprétatif. C'est l'interprétation, l'exécution de l'algorithme qui produit l'écart de la phrase avec elle-même. Les structures manipulées

sont des structures univoques, il faut interpréter pour produire l'objet distinct de lui-même et faire porter la contradiction. C'était nécessaire dans un lieu univoque où les phrases définies à la lettre prêt ne peuvent pas être différent d'elle-même. Le raisonnement à cheval sur un contexte symbolique (FS) et sur un contexte fonctionnel (FN) à interprétation automatiques est la source de la contradiction.

Le raisonnement qui conduit à l'indécidabilité repose sur la question de l'existence d'un chemin dans l'arbre des démonstrations menant à la phrase paradoxale G=*17 Gen r* de PME (FS). En faisant l'hypothèse qu'on trouve un chemin qui mène à l'autre phrase H (la phrase algorithmique $Sb(p^{19}_{Z(p)})$ où *p* est vu comme variable séparée), il faut ajouter une interprétation, une exécution « validée » d'algorithme pour conclure. On voit dans tout le raisonnement que Gödel se prémuni de toute interprétation pour ce concentrer sur l'observation des structures univoques. Un seul pas interprétatif, pourtant bien naturel, était indispensable. Une démonstration complètement formelle (uniquement appuyé sur des structures univoque) n'était pas envisageable.

Vérité intérieure et extérieure

Etudions comment Gödel fait porter la contradiction [premiers paragraphes p129]. Tout repose sur un raisonnement logique entre vérité intérieure et extérieure. Le concept mécanique « x est une demonstration de y » est un concept algorithmique (FA) s'exerçant sur un arbre récursivement bien défini (DA). Si x est une phrase (FS) qui s'avère décrire un chemin de l'arbre (DA) qui abouti à y (FS), alors l'affirmation est vrai. Cette notion de « vérité d'un chemin » pourrait se nommer autrement, rien ne changerait dans l'algorithme qui parcours l'arbre. La vérité est devenue mécanique et intérieurement traduite dans la structure manipulée, on a ni besoin de savoir que c'est un arbre, ni besoin de savoir qu'on cherche un chemin, il n'y a qu'à exécuter un algorithme pas à pas. On ne sait absolument pas qu'on est en train de prouver une phrase, on fait juste des calculs automatique qui fournisse un résultat qui pourrait bien être autre chose qu'une affirmation de vérité. C'est la vérité mécanisée. Si la valeur sémantique de cette fonction est forte, puisqu'elle modélise une certaine idée de la vérité (la prouvabilité), cela n'a pas d'incidence sur sa manipulation.

C'est aussi dans une structures univoque que l'on construit mécaniquement la phrase *(17 Gen r)*. Jusque là, on a définit et poursuivit des manipulations algorithmiques. Mais lorsque qu'on demande si la phrase *(17 Gen r)* est démontrable ou réfutable, on change de registre. Il s'agit d'un concept de « vérité extérieure » à la structure établie, c'est une interrogation de nature spéculative. On s'interroge sur l'existence de certains liens dans la structure univoque : existe-t-il un chemin dans l'arbre des démonstrations partant du socle des axiomes qui aboutirait à la phrase *(17 Gen r)* ? Cette question là n'a rien d'algorithmique au départ, c'est un questionnement qui spécule sur deux structures : cette phrase bien formée (PS) est-elle aussi une place de phrases démontrées (DS).

En observant comme porte la contradiction, on va retrouver les contextes paradoxaux d'autodéfinition contradictoire. En effet la contradiction produite [paragraphe 1 p.129], qui mène à l'indécidabilité, ne porte nullement sur la recherche effective d'un chemin à

l'intérieur de la structure (DA), mais sur une compatibilité entre la vérité intérieure et extérieure. On assiste comme dans le cas des paradoxes à une interaction de vérité indépendante des structures dures en jeux. Il n'y a pas de recherche à faire pour obtenir la contradiction car c'est une phrase auto-contradictoire. C'est un jeu de logique en solitaire, déconnecté de la structure, c'est un jeu de nature interprétative (être différent de soi-même dans un contexte d'objet univoque).
Le raisonnement qui produit l'indécidabilité est fondée sur l'impossibilité de la phrase (17 Gen r) à être vraie ou fausse car produisant dans les deux cas une contradiction. Tout s'éclaire quand on comprend qu'on a pas manipulé une unique phrase (17 Gen r) (FS) pour produire une contradiction, mais aussi une autre phrase issue de celle-ci par interprétation.

En mathématique, si la manipulation valide d'une spéculation produit une contradiction du genre « A et non A », on obtient un système incohérent. Gödel en déduit la non-prouvabilité de *(17 Gen r)*. Mais il est aussi possible que le système soit bien incohérent, non pas Principia Mathématica, mais le cadre interprétatif que Gödel à utilisé : le fait d'interpréter une phrase et de la considérée toujours égale dans tous les cadres de manipulation.
La phrase 17 Gen r est construite par un algorithme, elle est bien formée. Mais rien ne garantie qu'une phrase bien formée « possède » vérité ou même l'erreur, car elle pourrait être insensé, non-univoque. En fait ce n'est pas la phrase qui peut statuer sur cette question c'est le cadre manipulatoire d'un côté (ce qu'on accepte comme manipulation valide) et interprétatif (ce qu'on voit derrière les phrase). Or dans les deux cas il y a des difficultés. Nous avons vu la manipulation, on peut parler de l'interprétation maintenant.

On peut s'interroger sur la pertinence de cette phrase :

- Algorithmiquement, elle est définie à base de boucle imbriquées qui ne se termine pas et dont la poursuite de l'algorithme dépend de la terminaison.
- Si on valide l'usage libre de l'interprétation, la répétition de l'interprétation de cette phrase produit en miroir infini des affirmation contraire à elle-même. Peut-on dire qu'une telle phrase possède une sémantique ? En tout cas pas une sémantique algorithmique.

La phrase (17 Gen r) est bien formée mais elle est spéculative : elle affirme quelque chose, on ne sait pas trop bien quoi (selon le nombre d'interprétation). De cette phrase bien formée, on ne connait ni le bon-sens, ni la vérité, ni la prouvabilité. La question extérieure que Gödel pose n'est pas celle de la « vérité », c'est la question de la « prouvabilité » : cette phrase est-elle démontrable ? Bien que la question observe la structure de l'extérieure, on ne cherchera pas à trouver de solution « par l'observation extérieure » en scrutant les branches de l'arbre (DA). La méthode utilisée consiste à « traduire la question extérieure en une question intérieure ». [Par. 1 p.129], on fabrique une nouvelle phrase intérieure au système qui traduit notre question : « 17 Gen r est démontrable » ?

Prenons bien conscience de ce qui a lieu à cet instant. On transforme une question de vérité naïve (y'a-t-il un chemin ou non ?) en une affirmation de vérité formalisée. C'est peut-être une évidence que la sémantique de la phrase de PME « x Dem y » (FS) parle d'existence de chemin et donc que la traduction en « existence de chemin » est naturelle. Mais en réalité dans PME, il ne s'agit que de lien « tout en un » exprimant des manipulations mécanique neutre de tout sens. Pour entrer une question sensée dans le système formel, il faut passer d'une lecture purement sémantique à des phrases décrivant des liens ou des algorithmes en dur. En faisant cela, on passe de <naïf, flou, liée à la perception> à <univoque, calculatoire, neutre>. On traduit la question en lui fixant un sens symbolique précis. On intègre ainsi le monde de la neutralité. Et c'est tout à fait légitime, c'est une pratique plus que courante en mathématique. Mais il y a une difficulté : si le monde où l'on traduit est neutre de vérité, le choix de la traduction, lui, n'a rien de neutre… On traduit une vérité extérieure en « vérité » intérieure, ce pas était nécessaire pour se placer dans un terrain unique et univoque qui permet de produire une contradiction. Cette contradiction ne concerne pas la structure mais la traduction.

Dans la question-affirmation de départ « 17 Gen r est démontrable » ? Le mot démontrable est au départ naïf. Il est aussitôt reconnu comme traduisible par le concept de PME déjà formé. Cette question n'est alors plus naïve, vu ainsi, elle est formée uniquement de concept de PME. En vertu de la valeur algorithmique de ces concepts, elle peut être vue comme relation de vérité vraie ou fausse et traduite par le théorème V en phrase symbolique. Toute la contradiction repose sur le fait que cette unique phrase sera traduite de deux façons différentes [1 p129] :

- Une première importation qui utilise l'interprétation discutable [15, 16].
- Une deuxièmement importation avec l'interprétation issue de [9 ;10] qui utilise directement le théorème V. (On constatera encore une fois l'ambigüité des écritures. Dans ce paragraphe [1p129], c'est l'écriture (17 Gen r) qui est discutable, car derrière cette écriture on importera $Sb(p^{19}_{Z(p)})$ avec *p* vu comme variable sous forme *sss…s0* (F0) séparée d'un algorithme unique s'appliquant à elle)

Ces deux « importations » produisent des phrases contradictoires.

Relevons qu'on a importé une vérité extérieure naïve, et qu'après tout on a le droit de l'importer comme on veut non ? L'interprétation a lieu avant importation, elle a lieu dans le monde non encore formalisé des concepts ; au moment exact où on formalise la phrase naïve, c'est-à-dire au moment où on leur donne un sens algorithmique univoque. Importer nécessite de choisir un sens algorithmique précis. Il n'y a pas de faute logique à importer par un choix ou un autre, puisqu'on n'a pas encore intégré le monde formel. Par contre, il y a une difficulté de pertinence importante.

La question initiale, au lieu d'être étudiée de l'extérieur est importée selon deux interprétations différentes contradictoires ; voilà comment on peut construire un objet distant de lui-même dans un monde univoque sans faire de faute de logique… Voilà comment on peut résoudre un problème de moteur sans s'y salir les mains : on s'intéresse au problème plutôt qu'au moteur (Reconnaissons là une pratique courante de la philosophie…)

Cadre subjectif

Cette surprenante indécidabilité apparait ici à cause des modes de raisonnement. Il ne faut pas faire peser la faute sur « l'identification après exécution » seule, c'est tout un cadre où se rencontre plusieurs pratiques spécifique qui conduise à cela. Dans la plupart des contextes mathématiques, l'interprétation possède un rôle anodin qui ne permet pas de telle conclusion. Mais ici beaucoup de concepts permette cette curiosité :

- On étudie des phrases de PME avec des phrases de PME qui traduise la vérité extérieure en vérité intérieure.
- On a la possibilité de « s'appliquer à soit même », ce qui produit la possibilité de construire une phrase en miroir (à interprétations près).
- Dans cette mise en miroir, on a la possibilité de se décaler de soi-même par un « contraire » (par un procédé astucieux).
- C'est sur le concept de prouvabilité qu'est construite la fiabilité : on a ainsi donné un nouvel habit formel et mécanique à la notion de vraie. Le mécanisme ancien et simple de la vérité scindé en deux de façon irréfutable est mis à distance et à questionnement. En changeant de référence de confiance, et en comparant les deux notions dans des lieux sensibles, l'ancienne vérité ne tient plus, elle explose en curiosité : son cœur sacré dichotomique se délite dans de mystérieux inconnu : des phrase ni démontrables, ni réfutables mais vraies… à moins que ce ne soit autre chose que vraie… enfin ça dépend du cadre …
- On étudie tout cela dans un cadre unique où tout est projeté : les entiers naturels. Cela produit une fusion entre structure qui étudie et structure étudiée qui brise l'idée d'étude d'une structure au profit de conséquence d'un mélange. On étudie pas ce que « PME » peut produire, on étudie ce que « l'observation de PME par PME mise à plat » peut produire comme curiosité.

Il faut comprendre que poser une égalité entre deux choses différentes est un choix de manipulation. Rien n'y oblige, rien ne l'interdit. Seulement l'accepter dans un tel contexte à cheval sur plusieurs cadres de lecture produit la situation du paradoxe du menteur. Ainsi, c'est les manipulations autorisées qui produisent ces curieuses conséquences à partir de manipulations pour l'essentiel formelles. Le cadre permet la phrase (et ses lectures variée), les règles de manipulation de cette phrase (accepté par le cadre) ont pour finalité une curiosité aléthique.

Vu ainsi, ce raisonnement ne révèle rien sur la nature profonde des mathématiques, mais pose plutôt question sur la pertinence du choix de certains cadres de raisonnement.

Indécidabilité arithmétique

Concentré sur la phrase curieuse, nous n'en avons pas encore parlé, mais c'est utile pour enfoncer le clou : qu'en est-il de la question de l'indécidabilité arithmétique ? Au vu des lectures établies, la conclusion inévitable est beaucoup plus engageant qu'une

simple perspective : la conséquence de notre approche est qu'il n'existe plus d'indécidabilité arithmétique dans ce théorème, contrairement à ce que dit Gödel.

Comme nous venons de le voir, la contradiction ne porte pas sur (17 Gen r), mais sur le double embarquement dans le système formel de la question naïve « (17 Gen r) est prouvable ». Si on observe comment la contradiction arithmétique est produite, on verra que ce sont aussi deux vérités arithmétiques contraire que l'on va assimiler en une seule. Pas étonnant que deux vérité arithmétique contraire produisent une impossibilité. Ce n'est pas la phrase *(17 Gen r)* qui est traduite arithmétiquement mais la question naïve extérieure, et donc de deux façon différente.

Observons cela plus en détail. Les vérités arithmétiques sont construites par le théorème VII [p.133]. Ce théorème établi que l'affirmation d'existence d'un nombre par une phrase de PME de type « il existe x verifiant F(x) », repose sur des tests d'égalité de type fonctionnels $f(x_1,x_2,\ldots x_n)=x_0$; on y compare un calcul de fonction avec un nombre. Les fonctions utilisée sont définies de façon récursive au dessus d'autres fonctions récursives jusqu'au fondement fait de constante et de la fonction successeur. Chacune d'elle peut être traduite algorithmiquement en une unique boucle au dessus des autres fonctions (algorithmes). La dernière boucle qui exprime le résultat de la fonction calcule ce résultat au travers d'une suite finie de nombre (le nombre d'itération des boucles est lui-même déterminée par un calcul récursif). Par ce mécanisme un test d'égalité fonctionnelle pourra être traduit et aura la même valeur de vérité qu'un test d'égalité numérique entre x_0 et le dernier nombre d'une suite finie.

Par un procédé fondé sur le théorème chinois, Gödel transforme la suite de nombre finie $u_n=f(n)$ en suite de restes de division euclidienne. Puis c'est le cœur de la traduction : l'algorithme produisant une suite de nombre est converti en un calcul arithmétique sur ces nombres (plus de boucle, plus d'affectation, mais seulement des égalités numériques). Ainsi les affirmations élémentaires de type « il existe x tel que $f(x_1,x_2,\ldots x_n)=x_0$ » peuvent être transformée en affirmation de calcul arithmétique.

En appliquant ce théorème VII à la phrase « il existe x tel que x dem (17 Gen r) » [p129], c'est-à-dire la phrase naïve qu'on a importé dans (FS), on obtient l'existence d'une vérité arithmétique « parallèle » a la vérité algorithmique de cette phrase (FA) qui « répond » vrai ou faux à la phrase formelle (FS). Mais de quelle phrase formelle parle-t-on ? Puisqu'on a importé deux phrases qui correspondent à des algorithmes de vérifications distincts et qui ont des vérités contradictoires. La nature algorithmique de ces deux phrases étant différente, les deux relations arithmétiques correspondantes diffèrent aussi.

En effet, le nombre *p* vu sous la forme sss…s0 est traduit dans les relations arithmétiques en un simple nombre arithmétique. Mais quand ce nombre *p* est possède une dimension sémantique active (dans la seconde importation), il intervient dans le test algorithme en produisant une négation supplémentaire et donc de façon identique dans sa traduction arithmétique).
La vérité de ces phrases formelles étant opposée, la vérité des phrases arithmétiques correspondantes l'est aussi. Puisqu'on est dans une situation algorithmique univoque je

conjecture contrairement à Gödel que l'une des phrase est vraie et que l'autre est fausse. Je conjecture qu'« il n'y a pas de chemin de démonstration menant à (17 gen r) », et donc que la phrase arithmétique qui traduit cette affirmation est vraie. La négation de cette phrase serait donc fausse et la phrase arithmétique correspondante aussi. L'idée simple fondant la conjecture: Une phrase de PME comme (17 gen r) possède une sémantique contradictoire qui a peu de chance d'exister dans un système démonstratif bien formé comme PME. Bon courage pour le prouver…en mettant les mains dans le moteur.

On comprend à nouveau, que l'indécidabilité des phrases formelles provient d'une impossibilité « logique » intérieure issue d'une importation contradictoire. La logique de l'indécidabilité répercutée sur la vérité algorithmique n'a pas lieu de l'être parce qu'on ne peut pas décemment identifier en une seule, deux affirmations arithmétiques contradictoires. Rien ne permet plus de statuer sur une indécidabilité algorithmique. A moins d'être « très joueur » et d'identifier arbitrairement des vérités arithmétiques différentes sous seul prétexte que les phrase symbolique associée sont identifiables par une interprétation naturelle. Interprété ainsi l'identification est « possible », mais non pertinente. Au mieux c'est osé…

Mais après tout, au dessus d'un fondement ou tout n'est que schéma et interprétation mécanique, on a toute liberté interprétative. 0=1 n'est pas un problème en soi, ça pourrais même avoir une certaine utilité sémantique dans certains contexte… Seulement accessoirement, on aime bien créer des structures pertinentes, stables et indépendantes des contextes de manipulation afin de nous rendre le monde lisible… n'est-ce pas ce que trahit l'histoire des objets et des manipulations mathématiques.

Conclusion

En choisissant la notion d'affirmation comme élément fondamentale des mathématiques, en enfermant cette pratique dans une mécanique symbolique univoque, on a plus accès à la sémantique contenue dans ces symboles, c'est d'autant plus gênant qu'on navigue dans des eaux troubles de la sémantique abstraite. Qu'à cela ne tienne, on manipule les symboles et laisse l'interprétation parler seulement après. Mais n'est-il pas contre nature d'accepter la sémantique finale en refusant toute sémantique intermédiaire?
N'y voyant pas assez clair en ce lieu, on fait confiance à la manipulation symbolique. Seulement, on est pas conscient que la manipulation symbolique repose sur des interprétations, des reconnaissances, qui sont une essence culturellement non mise à jour, mais pourtant essentielle des mathématiques. L'observation du théorème de Gödel dans un contexte sémantique de la mécanique de la manipulation au lieu de la mécanique de la vérité donne une sémantique beaucoup plus claire : en identifiant chaque terme de façon univoque sur la base de « schéma construit pas à pas », elle met à jour l'assimilation dérangeante de réalités distinctes qui produisent la contradiction du menteur qui est une confusion entre objet et observation non définissable simultanément. Est-il raisonnable d'accepter un cadre qui choisisse d'être «menteur » ?

En signalant que c'est l'observation de ce dont parlent les mots plutôt que des mots eux-mêmes que progresse la compréhension. C'est ce qui permet de sortir du ruban de Möbius de la logique mathématique. Ainsi le désir de compréhension du monde (le réalisme) m'apparait comme un « retour aux choses elles-mêmes », une dissociation toujours plus fine de l'enracinement du réel et de nos indispensables logiques interprétatives. Seulement, même muni d'un tel mot d'ordre, un phénomène perceptible de la pensée peut nous retenir dans la logique du constituée plutôt que nous pousser vers l'observation de ce qui le dépasse, c'est-à-dire vers l'apparaitre de la réalité qui s'affine. Nos outils, nos concepts, nous permettent de manipuler l'inconnu qui les jouxte de près, pourvu qu'on tienne notre mire bien dirigée vers lui. Etre réaliste c'est voir son ignorance.

J'ai probablement énoncé trop vite de nombreuses erreurs, de nombreuses imprécisions (ce n'est que trop courant dans ma pratique d'une concentration toujours dirigée vers le sens le plus unifiant). Mais puisqu'il s'agit d'une critique sur les contextes profonds, j'ai peu eu l'occasion de manipuler la rigueur. Je ne vois pas d'ailleurs comment faire, à moins de refonder complètement une nouvelle logique qui engloberait celle-ci et qui serait probablement beaucoup trop lourde à manipuler pour faire percevoir clairement les choses.

Il y aurait encore beaucoup à dire sur la nature profondes des mathématiques, sur le bénéfice qu'il y a tirer de la césure entre schéma et interprétation, de diriger nos regards sur les objets plutôt que sur les contraintes portant sur ces objets, de focaliser l'intérêt sur les modes de définitions des objets mathématiques, etc… mais c'est un autre sujet, beaucoup plus vaste et intéressant. Il s'agissait ici de brosser l'aperçu d'un changement de perspective face à un lieu stratégique.

J'espère avoir atteint une certaine clarté, et avec plus d'intensité encore une certaine pertinence. A moins que je ne me sois fourvoyé dans une idiosyncrasie aveuglante, auquel cas je vous serai reconnaissant de m'en faire percevoir la perspective…

Navenne, le 14 septembre 2010,

Michaël Klopfenstein.

Bibliographie

[1] - Le théorème d'incomplétude de Gödel p.107-143 - Editions du Seuil - de E. Nagel, J.Newman , K. Gödel et J.Y. Girard - Traduction J.B. Sherrer.

Annexe 1 - Aperçu d'une théorie de la pensée

Cette partie est la simplification drastique d'une théorie non publiée. Elle se présente comme une première ébauche utile parce qu'elle pourra servir de colonne vertébrale pour une approche plus fine. L'approche fine qui n'est pas produite ici, se veut être la description d'un mécanisme de la pensée, non pas achevé, mais dégrossi par des concepts que j'espère pertinent. La version fine exprime le fonctionnement de la pensée sous forme de concept et de mécanismes. Ces mécanismes sont décrits de telle sorte qu'ils peuvent être modélisés informatiquement. C'est important à savoir pour situer la tonalité de cette approche dont l'objectif et de donner une incarnation mécanique à la sémantique (sans visés réductionnistes, mais ce n'est pas le lieu de l'expliquer). Les détails de la théorie plus fine seront utiles pour répondre aux nombreuses questions incontournables qui s'attachent à ce résumé, en particulier pour lui donner sa dimension mécanique.

Le Concept : cellule de base

Notre pensée ressemble à un film qui se déroule, continue et discontinue à la fois. On se fera une bonne idée de ce qu'est « un concept » en considérant que chaque image de ce film intérieur, chaque impression, chaque état de conscience est un concept. Toutes nos impressions mentales d'un instant, au sens le plus large qu'on puisse imaginer, se succédant tour à tour, sont des concepts. Et ils seront tous différents, car chaque instant est l'instant de création d'un nouveau concept. Aucune possibilité de retour à un concept précédent.

J'explique ces états mentaux par un mécanisme qui à chaque instant crée une nouvelle cellule. Cette cellule « stocke» l'état mental de l'instant présent. Ainsi « état mental », « concept » ou « cellule » seront employés de façon synonymes. On pourra aussi dire « neurone », seulement un neurone ne deviendra une « cellule » qu'à partir du moment où il sera connecté aux autres « cellules » par un chemin «activé».

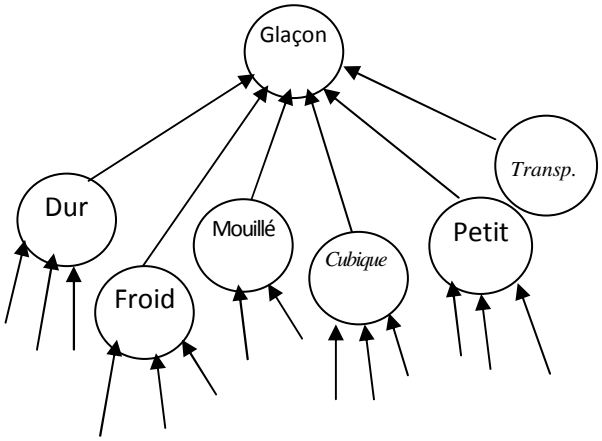
Les associations

Les cellules sont reliées entre elles par des associations du bas vers le haut : chaque nouvelle cellule sera le sommet d'un branchement de plusieurs cellules anciennes vers elle. Ce sont ces associations qui vont « fabriquer le sens » des concepts, le « contenu » des états mentaux.

Ainsi est définie la seule opération possible sur le sens, une sorte de « somme de sens» : chaque cellule sera tout simplement dotée de l'ensemble du sens qui provient des cellules en dessous.

Donnons un exemple caricatural. Imaginons que plusieurs concepts contiennent les sens suivants : « transparent », « froid » « dur », « mouillé », « cubique », « petit ». Si ces concepts sont tous branchés par des associations vers une nouvelle et même cellule-fille, le concept contenu par cette cellule sera assez proche du concept de

« glaçon ».



En pratique, aucun contenu ne pourra être aussi simplement résumé par un mot, ils seront nettement plus élaborés, liés et surtout abstraits, subtilement différencié. (On pourra se référer à la théorie du langage pour en prendre la mesure). Dans cet exemple, il ne faut pas s'arrêter sur les mots, mais sur des impressions que pourrait produire chacun de ces mots. Nous avons ici, la base du mécanisme de construction du sens. Appliqué de proche en proche, nous obtenons là le principe fondamental de construction du « sens ».

Pour que cela puisse s'expliquer mécaniquement, il faudra que chaque association (chaque lien, chaque dendrite activée) transporte des informations, il faudra faire circuler des échanges d'information dans ces liens : on les nomme flux. Ces informations ne contiennent pas de « sens », mais permettent de faire fonctionner la mécanique, pour construire des connexions, pour connaitre les liaisons, pour rechercher des sémantiques, pour structurer et bien d'autres choses encore.

Les cellules primitives

Le sens est ainsi construit comme des pyramides. Chaque sommet se démultiplie à sa base. Mais pour ne pas se démultiplier à l'infini, il faut que ces cellules finissent par reposer sur un socle bien réel de sens. Ce socle, ce sont les cellules sensitives de la perception (qu'on appelle souvent les qualias, mais ce n'est pas cela du tout, car toute perception est très vite très loin au dessus des perceptions sensitive, on le verra).

Autrement dit les concepts les plus simples qui puissent être ressentis sont les concepts des sens perceptifs. Ces concepts vont s'associer de proche en proche vers d'autres concepts toujours plus complexes, toujours plus « abstraits ».

Vide de Sens

Pour simplifier, on va supposer qu'au départ un nourrisson ne possède aucun autre concept que les cellules sensitives de base. Les premières choses qu'il ressent seront des concepts purement sensitifs.

Mais à chaque nouvel instant, les cellules « les plus stimulées » vont être raccordées en

groupe sur une nouvelle cellule. Ainsi, à chaque instant, cette nouvelle cellule produira la « sensation » réunie de tout ce que l'enfant perçoit de plus stimulant : au départ ces regroupements seront très « sensitifs ».

En suivant cette logique, on imagine que, très vite, chaque cellule sensitive sera associée à des millions de concepts au dessus d'elle. Mais ce n'est pas ce qui se passera, parce qu'un nouveau mécanisme intervient : la perception.

Construction de la perception

A chaque fois qu'une cellule sensitive est stimulée, elle émet une information (un flux) vers le haut dans toutes les cellules raccordées à elle. Les associations de sens créées se trouvent être des autoroutes d'information. Le principe de la perception réside alors dans le mécanisme: si une cellule « supérieure » reçoit un flux de l'ensemble des cellules inférieures qui lui sont raccordée, elle fait « Tilt ». Elle se trouve stimulée à son tour autant (voire plus) que les cellules en dessous d'elle. Ce « tilt » signifie qu'une information déjà perçue (car la connexion existe) a cette fois-ci été « reconnue ». Les cellules qui ont servies à la fabrication étant à nouveau stimulée, produisent la stimulation de la cellule abstraite. Ce mécanisme est celui de la reconnaissance des perceptions fondée sur la similarité des sensations.

La cellule supérieure ayant été stimulée, les cellules inférieures ne seront plus les « cellules stimulées », la cellule supérieure le sera « à leur place ». Donc pour la construction de la prochaine nouvelle cellule, ce ne sera plus les cellules inférieures qui seront associées, mais la cellule supérieure. Ainsi, le nouvel état de conscience ne sera plus construit à partir de cellules directement sensitives, mais à partir de regroupement de sensations.

En associant plusieurs cellules sensitives vers une cellule supérieure, on a créée une « abstraction », une sensation qui regroupe plusieurs sensations. Tout l'intérêt du mécanisme consiste alors à remarquer que cette abstraction réagit exactement comme les cellules de bases, selon un principe récursif. Si elle est stimulée, elle sera utilisée pour être regroupée plus haut. La stimulation se fait automatiquement à partir des sens perceptifs par les canaux déjà associés vers cette cellule, aucune analyse n'est nécessaire quel que soit la hauteur d'abstraction de la cellule.

De proche en proche, il se crée de très nombreux étages de pyramide, des abstractions toujours plus hautes qui « reconnaissent » des stimulations de plus en plus complexes par regroupement de « petites abstraction». Les contenants deviennent tour à tour les contenus. Voilà établie une profonde nature du sens.

Au résultat, on trouve un principe fondamental de ce modèle : la valeur sémantique (le sens ressenti) contenue dans une cellule est tout simplement donnée par la morphologie du réseau d'association qui aboutit sur cette cellule. Le « sens » de cette cellule est donc équivalent au sens total de tout le réseau qui est « en dessous » d'elle. On comprend alors la profondeur insondable d'une perception très abstraite fondée sur une immense largeur de concepts.

Il y a dans cette proposition un sous-entendu philosophique important : tout état de conscience ressenti est originairement issu des cellules sensitives. Ca parrait un peu

limitatif. Mais nous verrons plus tard que les « ressentis » se développent eux-mêmes en une vie intérieure propre libéré de ces fondements sensitif qui permet de construire loin de la seule reconnaissance perceptive, l'autonomie de la pensée.

Souvenir et analyse

Les souvenirs donnent une bonne idée de ces associations. En effet, en faisant quelques efforts de mémoire pour se souvenir d'un événement passé, il nous vient beaucoup de détails liés à ce souvenir : le son des voix, l'aspect des lieux, les odeurs, l'ambiance extérieure, notre propre sentiment psychique, etc... Autrement dit, chaque souvenir se détaille en plein de petits souvenirs.

De même, selon la morphologie proposée pour le « sens », chaque concept pensé peut être analysé selon une multitude de sous-concepts qui y sont contenus. On confirme ici l'idée de forme pyramidale du sens.

La mémoire

La durée de vie d'une cellule n'est pas éternelle. Au bout d'un moment, les cellules disparaissent. C'est l'explication de la mémoire des choses qui ne dure pas toujours. C'est un mécanisme de nettoyage automatique. Mais la durée de vie n'est pas uniforme. J'appelle ce mécanisme la rémanence des cellules.

La rémanence d'une cellule est fonction de son utilisation et son degré de stimulation initiale. Les cellules créées avec une forte stimulation dureront plus longtemps et les cellules utilisées souvent dureront plus longtemps. Les cellules utilisées sans cesse dureront même théoriquement à vie (les bases du langage par exemple).

Quand une cellule disparaît, on peut proposer qu'un mécanisme « résout » ses associations entre les étages situés en dessous et au dessus d'elle. Autrement dit, le contenu sémantique (qui se perçoit géométriquement ici) n'est pas forcément complètement perdu ; les liens de sens les plus forts peuvent subsister malgré la perte d'une cellule au milieu.

Ceci est une version très simplifiée du modèle, mais elle permet déjà de comprendre que la mémoire est la partie la plus importante de la pensée, en quantité. La conscience n'est qu'un petit point émergent d'une immensité accumulée.

Et pour être précis, une cellule mémoire ne revient jamais directement à la conscience. C'est une nouvelle cellule « branchée sur le souvenir » qui fera resurgir la mémoire de son souvenir ; chaque instant est une nouvelle cellule….

Les contextes

Comment se fait-il qu'en regardant un livre fermé, on puisse se concentrer selon notre désir sur la forme du livre, sur la couleur du livre, sur la forme des lettres du titre, sur le sens porté par ce titre, sur un souvenir évoqué par le titre, etc... A partir des mêmes stimulations sensorielles, les sensations perçues peuvent être radicalement différentes en valeur sémantique. Pour comprendre cela, il faut décrire le phénomène des

« contextes » qui intervient dans la perception.

Nous avons dit que le flux de perception partant des cellules stimulées se propage du bas vers le haut selon les « tilts » locaux. On appellera ces Tilts, des résonances.

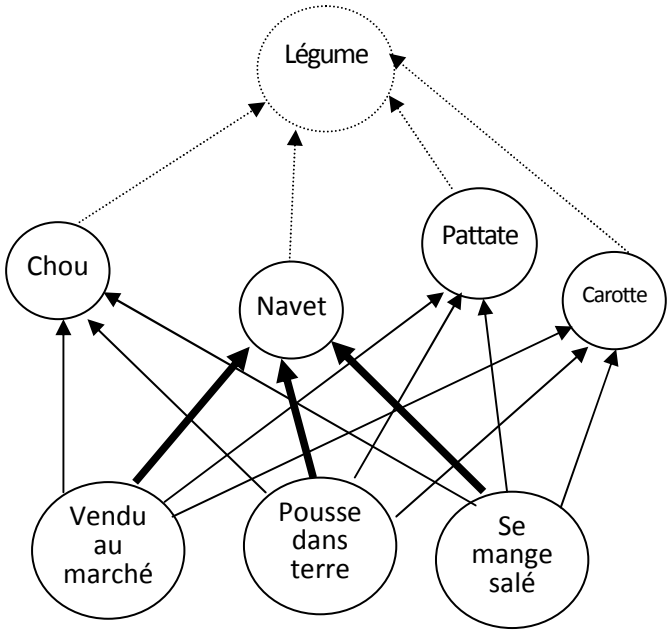
A l'intérieur de chaque cellule existe un souvenir de la dernière stimulation qui diminue lentement, cela constitue un paramètre « contextualité». La liberté qui existe dans la perception s'explique en comprenant que la « résonance » est nettement renforcée par les « contextes » forts dans les cellules traversées. Le flux qui se dégagera vers le haut sera d'autant plus fort que ce paramètre est important. Ainsi, le mécanisme des contextes va influencer le parcours des flux de perception en gonflant l'influence des concepts qui possède un contexte fort. Autrement dit, les choses extérieures seront « perçues » (cellules final du flux) en fonction de l'activation de certains contextes mentaux qui va « diriger » la valeur sémantique perçue parmi tous les chemins possibles. Tout cela est automatique et inconscient.

Par ailleurs, ce mécanisme explique aussi la continuité « naturelle » de la conscience qui se construit en permanence sur des concepts sémantiquement proches. Notre pensée n'est pas sémantiquement décousue, mais dans l'ensemble elle est assez suivie. Les contextes immédiats aspirent la perception. Les cellules nouvelles se construisent en formant des chaines de cellules imbriquées les unes au dessus des autres, elles produisent une continuité sémantique.

La synthèse

Pour expliquer de nombreuses capacités mentales, il faut ajouter le mécanisme primordial de « synthèse ». On pourrait dire que ce mécanisme complètement automatique sera l'intelligence de base du système. C'est lui qui va organiser les liens en fonction de leur « sémantique ».

Voilà le fonctionnement de ce mécanisme : supposons un enfant en train de manger du navet. L'enfant a suivi le parcours de cet « objet » acheté le matin même au marché ; il était d'ailleurs plein de terre sur l'étale du vendeur. On peut dire alors qu'au concept « navet » (non pas le mot, mais la perception de ce qui est dans l'assiette) sera associé



(en dessous) les concepts déjà connus « se vend sur le marché », « se mange salé », « se cultive dans la terre » (et beaucoup d'autre bien sur).

Voici alors le mécanisme de synthèse : à toute création d'une nouvelle cellules (comme ici le navet), le mécanisme de création se poursuit par la rechercher des « frères sémantiques », c'est-à-dire les concepts qui ont les mêmes ancêtres. L'enfant trouvera par exemple que « chou », « patate », « poireau » et « carotte » possèdent ces mêmes ancêtres. Immédiatement après la création de la cellule « navet » sera créé un concept synthétique qui ressemblera à « légume » (mais en très abstrait, bien sûr).

Tout cela se passe à l'insu de l'enfant. Autrement dit il y a création de cellule sans que l'enfant en soi conscient. Et l'on découvre là un autre principe : la conscience ne naît que dans certaines cellules créées.

Le mécanisme de synthèse cherche à grouper chaque cellule créée dans un rapprochement de sens avec ce qui existe déjà. Ce mécanisme construit des abstractions inconscientes performantes pour créer des « zones sémantiques ». Il faut bien comprendre que nos exemples sont très caricaturaux, c'est à un niveau beaucoup plus fin, beaucoup plus riche et insondable que ce joue ces mécanismes. Pensons à l'infini variété des sensations existante sur un même concept.

La création de cellules synthétiques à pour conséquence de diminuer les étages empilés de concepts. Parce qu'un lien va relier ces cellules aux cellules parentes génératrices de la synthèse. Ainsi le système construit une organisation la plus efficace, les chemins les plus courts possibles pour arriver aux concepts abstraits supérieurs.

L'usage incessant

Les concepts qui sont très régulièrement et abondamment traversés par des flux de perception ont un destin un peu particulier. Ils sont forcément très importants en force de contexte, en rémanence. Ils sont donc très stables (non destructible) et leurs associations (supérieures et inférieures) présentent un débit important et fréquents. Il existera forcément beaucoup de concepts qui leur seront supérieurs. Mais paradoxalement, le nombre important de concepts supérieurs les voue à n'être jamais plus des cellules associées à une nouvelle perception. Pourquoi ? Parce que 'tous' les regroupements de concepts supérieurs normaux se sont déjà produits.

Le flux de perception trouvera donc toujours résonance dans les cellules supérieures et jamais dans ces cellules (qui ne s'associe plus à de nouvelles cellules supérieures). Ainsi, ces « concepts autoroutes » jouent essentiellement un rôle de canal perceptif. Comme ils ne se connectent plus au-dessus, il ne parviennent plus à la conscience pour eux-mêmes. Cette remarque a pour but d'expliquer que seuls les concepts supérieurs parviennent à la conscience, tous les intermédiaires basiques sont transparents. Il est même difficile voir impossible de « ressentir » des sensations « basiques » (ou les concepts sensitifs de bases). Ce n'est en tout cas pas en cherchant à les sentir. Des exceptions sont à prévoir, par exemple la douleur qui est un sentiment perceptif de base peut se ressentir facilement, on comprendra pourquoi (par l'intensité, par le peu d'abondance locale, et par un mécanisme particulier de besoin que nous verrons,etc.).

Les chaînes d'ordres

Jusqu'ici nous avons expliqué comment se déroule la perception, maintenant il va falloir expliquer comment se déroule l'action. Et englobe sous ce mot action (ou ordre) tous les processus mentaux dont nous sommes à l'origine autant une volonté d'agir musculairement qu'une recherche d'un souvenir, que bien d'autres choses encore.

De façon très caricaturale, on peut dire que c'est un peu le même processus que pour la perception, mais à l'envers. Chaque « ordre » produisant une action sera donné depuis une unique cellule mère et s'effectuera en se démultipliant vers le bas dans des « chaînes d'ordres » jusque vers les « bases des ordres » qui seront le déclenchement de cellules musculaires (quand c'est le cas).

Un ordre sera déclenché dans une cellule d'ordre créée spécialement pour chaque ordre nouveau. Les ordres comme les perceptions sont de nature très abstraite (construits les uns au-dessus des autres). Par exemple observons le destin d'un ordre comme « je vais acheter du pain ». Un mécanisme va décomposer cet ordre en autant de sous-ordres nécessaires qu'il faut pour effectuer la tâche. Les uns derrières les autres ou en même temps, les ordres vont s'accomplir selon un mécanisme de décomposition en tâche intermédiaires. Pour caricaturer la décomposition, on pourrait dire que le premier sous-ordre sera « rejoindre ma voiture ». Ensuite cela conduira à « me lever de cette chaise », puis « rejoindre la porte en marchant » etc. Il n'y a fondamentalement pas de chronologie au départ dans ces sous-ordre : chaque ordre recherche quel sous-ordre va pouvoir le « satisfaire ». Chaque ordre déclanché est mis en attente jusqu'à sa satisfaction potentielle. Parvenus vers le bas de la pyramide (l'action musculaire), des milliers et des milliers de sous-ordres seront nécessaires pour manœuvrer chaque muscle en temps voulu dans une coordination pratiquement parfaite. La manipulation des muscles est située très en dessous des ordres abstraits initiaux, de nombreux intermédiaire de moins en moins abstrait interviennent. L'action des muscles sont les ordres situés en bas de chaque chaîne d'ordre.

Maintenant, pour bien percevoir le mécanisme, il faut comprendre qu'à partir du moment où j'ai donné un ordre, toute la décomposition et l'exécution peuvent être réalisées dans une complète inconscience. Je peux chercher mon pain en me concentrant complètement sur un thème de philosophie, sans même réaliser tout ce qui se passe en moi dans l'exécution de cet ordre.

Cela étant assimilé, il faut comprendre l'immense importance de la perception dans le déroulement de chaque ordre. A chaque instant c'est la perception qui va ajuster les sous-ordres à effectuer : suivant que la porte est fermée ou ouverte, les chaînes d'ordres déclenchée ne seront pas les mêmes. Si elle est fermée, un sous-ordre sera 'ajouté' pour l'ouvrir. Je dirige mon corps en fonction des objets dans la pièce et je n'en suis pourtant pas conscient. L'analyse fine de la marche humaine, nous fait comprendre que les corrections musculaires sont permanentes et très anticipées. La marche est un jeu d'action-perception immensément précis.

Ainsi, la notion d'« ordre » est fondamentalement basée sur la perception. En effet, comment puis-je comprendre que j'ai besoin d'ouvrir la porte pour rejoindre ma voiture ? C'est parce qu'il existe en moi une « perception » qui comprend cette évidence implacable. C'est une perception et non un ordre qui me fait comprendre que cette porte

est un obstacle à franchir pour atteindre ma voiture. Ainsi, chaque ordre naît forcement d'une perception et chaque sous-ordre aussi; il en est de même pour la décision initiale de chercher mon pain. Les perceptions vont être à la base des ordres par le mécanisme de besoin –satisfaction.

Il resterait beaucoup à expliquer pour montrer comment tous ces sous-ordres peuvent être découverts automatiquement sans réflexion à partir des liens établie par les expériences passées. Voyons sommairement une partie de ce mécanisme.

Besoin-satisfaction

Le mécanisme présenté ici possède bien d'autres variantes possibles. L'intérêt des concepts décrit ici est leur mécanicité relativement accessible.

La cellule seule est neutre de tout contenu sémantique, ce sont les liens qui forment la sémantique. Dans notre système le « besoin » n'est pas (seulement) une notion sémantique construite dans les cellules, c'est un mécanisme de fonctionnement du système. Quand on dira « besoin », il s'agira d'un mécanisme automatique qui ne correspond pas vraiment au sens habituel du mot.

Le « besoin » est un flux d'information qui circule dans les liens qui unissent les « cellules », comme pour la perception. A la différence du flux perceptif, le flux de besoin laisse une marque indélébile dans les cellules fortement stimulées par ce flux (sous forte résonnance). Cela produit comme une étiquette « besoin » dans certaines cellules.

Un flux de besoin est déclenché par certaines cellules spécifiques (les cellules douloureuses par exemple) ou par des cellules fortement étiquetées. Ainsi le ressenti d'un « besoin » passé, produira un besoin présent si la perception ce reproduit. Chaque souffrance, chaque besoin, chaque attente produit un flux de besoin qui circule avec le flux perceptif.

Le « besoin » est le mécanisme qui exprime une « nécessité d'action ». Une douleur nécessite la cessation de la douleur, une attente nécessite une résolution, etc… Toute la création des ordres repose sur ce mécanisme : un ordre est crée quand une cellule de perception est touchée par un « besoin » atteignant un certain seuil. Ainsi se mécanise la création d'un ordre : c'est la « perception d'un besoin » qui a pour objectif de répondre à ce besoin. Ainsi chaque cellule d'ordre est alors solidaire d'une cellule de perception, celle qui a ressenti le besoin.

Quand l'ordre aura exécuté la chaîne d'ordre qui permet de satisfaire le besoin, il va se créer un nouveaux flux : un flux de « satisfaction » dont la force sera d'autant plus grande que l'exécution de l'ordre aura bien « satisfait » le besoin. La satisfaction d'un besoin est mesurée à la satisfaction de tous les sous-ordres. Plus l'ordre initial donné (où le sous-ordre) aura produit un flux de satisfaction important, plus le sous-ordre choisit pour répondre à ce besoin sera rémanent et lié à la cellule d'ordre initiale. Si jamais la même perception était activé, le sous-ordre qui à bien fonctionné sera facile à « retrouver » pour une réutilisation ultérieure (dans une recherche de sous-ordre en chaîne).

Ainsi le couple besoin-satisfaction est la dynamique de base qui crée les ordres et mémorise le chemin de leur satisfaction. Tout cela semble tellement élevé en

abstraction qu'on est en droit de s'interroger sur la possibilité d'un tel mécanisme. En particulier, comment se peut-il qu'un bon sous-ordre soit « trouvé » au moins la première fois pour répondre à un besoin ?

Construction d'une chaîne d'ordre

Nous ne donnons ici qu'un aperçu très grossier. Tout commence quand un ordre est déclenché automatiquement à la perception d'un flux de besoin. Cette création d'ordre produit un mécanisme de « recherche des ordres déjà existants » pour trouver l'ordre dont la « sémantique » (la proximité de liens perceptif) est celle qui correspondra le mieux au besoin en cours. Il peut y en avoir plusieurs et la force des contextes sera influente pour le choix. Ainsi un ordre sera exécuté en accomplissant le sous ordre sémantiquement et contextuellement le plus proche qui aura produit les meilleures satisfactions antérieures. Cela permet de comprendre que les ordres sont de nature aussi « abstraite » que la réflexion. Ils se fixent les uns au dessus des autres dans des abstractions (de la même nature que les abstractions perceptives).

Le déclenchement d'un sous-ordre naît d'une perception. La réalisation d'un ordre est complètement subordonnée à la perception. D'où l'interaction en temps réel existant entre la perception et l'exécution des sous-ordres. La « chaîne » de sous-ordres parcourus dépendra complètement des perceptions réalisées au fur et à mesure. C'est la perception qui fixe la contextualité et qui par la même déclenchera le sous-ordre le plus adapté pour répondre à toute la hiérarchie des besoins supérieurs, qui est toujours activée.

En fait, les expériences passées permettent de prévoir les meilleures satisfactions et donc d'anticiper les meilleurs sous-ordres à choisir, c'est-à-dire d'anticipé sur la réalité de façon très richement contextualisé. Ce mécanisme produit donc une véritable « analyse » des conséquences des ordres par la perception qui est déterminante pour choisir l'ordre en fonction de l'anticipation de son résultat. Autrement dit, la réponse à un ordre c'est toujours l'exécution du « meilleur » sous-ordre « déjà existant » qui sera utilisé, jusqu'à satisfaction complète de tous les ordres. Et la satisfaction sera complète quand le flux de besoin disparaîtra et que le flux de satisfaction des sous-ordres le remplacera. Le nouvel ordre avec les liaisons que se sont construire sera alors « enregistré » comme valable pour la cellule de perception initiale qui l'a déclenché. Cette cellule deviendra alors son « déclencheur automatique » dans une réutilisation ultérieure (mais cette fois-ci en tant qu'ordre subalterne déjà existant). Ce mécanisme permet de construire de longues pyramides d'ordres dont l'exécution sera automatique, sans besoin de rechercher le meilleur sous-ordre. On trouvera les détails de ce mécanisme complexe dans la présentation complète du modèle.

La conscience

Quand on considère toute la partie inconsciente d'une perception (tout le parcours de la pyramide inférieure par le flux de perception) et des ordres (toute la construction des chaînes d'ordre), on constate que ce qui se déroule dans notre conscience n'est que la pointe, le sommet, d'une réalité sous-jacente immense. Seules les cellules les plus

stimulées parviennent à la conscience. Celles-ci surfent juste au dessus des cellules perceptives les plus stimulées (qui ne parviennent jamais plus à la conscience). Ainsi la conscience n'est qu'un parcours linéaire tout neuf juste au dessus d'un monde immense en trois dimensions (les neurones déjà associés).

Mais dans notre système, la conscience ne fait pas seulement que « percevoir », elle possède un autre rôle important : « l'action ». La conscience est à l'origine :

- des ordres importants (ceux dont le flux de besoin est fort),
- des « ordre contradictoires » qui génère un mécanisme de résolution important.
- ou encore des « ordres relativement importants qui ne trouvent pas de sous-ordres comme réponse ». Ils produiront une stimulation forte qui « appellera » la présence de la conscience.

Sans détailler techniquement ces notions et leur déroulement, on peut entrevoir le rôle de la conscience. Elle va lancer des « recherches » de sous ordres beaucoup plus profondes que l'activité automatique. Il s'agi d'une « réflexion » plus étendue en étages de concepts pour trouver une solution.

Chaque nouveau ressenti se situe dans une nouvelle cellule (et dans un contexte nouveau qui lui est en général associé). Il faut ainsi comprendre que les mots à «sémantique stable » sont des impressions dues à l'usage fréquent de certains concepts contextuellement saturée. Dans notre modèle, il est donc plus avisé de parler de « zones sémantiques stables » que de référence fixe. Cela a pour conséquence notre incapacité totale de parler précisément d'un concept de la pensée. Chaque concept est le sommet d'un sens immense, inaccessible et contextuellement diversifiable que des cellules synthétique viennent malgré tout réunir en certaines zones.

C'est pourquoi, il n'est possible d'exposer le modèle que par des exemples très caricaturaux. En pratique, chaque pensée étant différente, il est impossible d'en rendre compte en précision. Cela va même plus loin, il est assez logique de comprendre qu'aucun mot n'est enfermable dans une zone sémantique « fixe ». Chaque contexte va influencer le sens d'un mot. Et l'on trouve ici, la difficulté de s'appuyer sur les mots pour produire une logique naïve fiable. Cette mouvance de fond est un des grands problèmes de la philosophie et du langage quand ils cherchent à prendre un appui stable sur les mots.

La réflexion

Jusqu'ici, on arrive à comprendre comment la pensée peut percevoir, lancer un ordre en réaction à un besoin. Mais il faut encore pouvoir expliquer comment la pensée crée l'intelligence, les raisonnements, les analyses qui peuvent être très complexes et profondes.

Il est évident que nous ne pourront pas en rendre compte de façon satisfaisante parce que cela ne peut pas être dissocié du contenu rendu stable par l'existence stable du monde et parce que ce contenu est inaccessible.

Il faut commencer par comprendre que la construction des perceptions peut devenir complètement autonome de la perception : le cerveau peut se mettre à raisonner seul,

purement « de l'intérieur ». Il le peut parce qu'il est possible de construire des « perceptions de l'intérieur » en stimulant lui-même des cellules en l'absence de toute stimulation sensorielle (cela arrive notamment lors des recherches de sous-ordres). Se rappeler d'un souvenir correspond à un ordre, mais la nouvelle cellule qui perçoit le souvenir, en se connectant au dessus de l'ancienne (qui « conservait » le souvenir), produit un nouveaux sens purement intérieur à partir de ce qui est déjà emmagasiné.

Les phénomènes de « recherches » consistent à trouver, à proximité de connexions, les perceptions et les ordres les plus adaptés. Cela correspond à une activité purement intérieure. A partir du moment où des concepts « abstraits » sont créés, il va se créer des « besoins abstraits ». Quand l'abstraction est suffisamment importante, quand la reconnaissance du monde est suffisamment efficace, on peut imaginer que les anticipations rendent compte du monde sans avoir à le percevoir. Cela conduit à une dynamique interne qui peut ne pas être prioritairement dirigé vers l'action musculaire. On peut imaginer que cela conduira même à une activité toujours plus intérieure pour anticiper le monde, puis pour anticiper soi-même. Jusqu'à construire une dynamique purement intérieure avec ses propres besoins et ses propres satisfactions. Pensons à la philosophie ou aux mathématiques qui réfléchissent sur des concepts logiques issues d'une longue éducation. Il se trouve que chez l'homme, hautement abstrait, cette « activité intérieure » est l'essentiel de nos ordres initiaux : nos ordres conscients sont la plupart du temps très abstraits.

Dans le domaine de la réflexion et de l'intelligence, on peut s'arrêter sur un mécanisme élémentaire très important : c'est le mécanisme que j'appelle « la transposition ». La transposition est la capacité d'appliquer une méthode mentale dans un contexte différent de celui qui a trouvé la méthode. Dans une analyse grossière, cette technique est directement issue de l'appropriation d'un sous-ordre par un ordre initial. Mais la grande difficulté consiste à comprendre comment notre esprit parvient à comprendre que ce sous-ordre sera efficace, alors que le contexte est transformé, voir très différent (les sémantiques étant éloignées, il n'y a pas de raison que ce sous-ordre soit trouvé). La réponse est dans « l'abstraction » : pour trouver une méthode ailleurs, il faut que l'esprit perçoive des abstractions communes aux contextes. D'où l'importance d'une abstraction qui soit « vraiment abstraite » pour rassembler des zones éloignée. C'est le mécanisme de synthèse qui produit ces abstractions, ces ressemblances sur des zones sémantiques différentes. C'est aussi la conscience, avec sa capacité de produire des recherches approfondies, qui va permettre la « capture » de ce sous-ordre en trouvant les abstractions communes. On a la une petite idée du mécanisme de base de « l'interprétation », des capacités adaptatives humaines, …

Système Modulaire

Revenons sur le principe de création d'une nouvelle perception. Il faut bien faire la différence entre les liaisons existantes entre les neurones par les synapses et dendrite et les « liaisons sémantiques » établies par la perception. Seules certaines liaisons physiques correspondront à des liaisons sémantiques. Si plusieurs cellules sont stimulées par la perception, elles doivent être « rassemblée » vers une nouvelle cellule. Voilà comment cela peut se passer : comme les neurones sont abondamment liés,

après deux ou trois cellules intermédiaires, il existera forcément une cellule commune à toute ces « cellules sommets » qu'il faut unir. Le flux de perception produira une convergence rapidement. C'est quasiment comme si on trouvait toujours une nouvelle cellules à crée « quasiment voisine » des cellules stimulée. Il est possible ainsi que certains neurones servent seulement de lien intermédiaire. Une fois la cellule et les liens trouvés, tout sera figé chimiquement. Leur réaction ultérieure sera celle de « liens sémantique » et plus de lien physique « vide de sémantique ».

Dans tout le système décrit jusqu'ici, l'élément de base (le neurone) est complètement neutre de tout contenu. Dans cette neutralité tout semble identique. Or, on sait que ce n'est pas le cas dans le cerveau. En effet, il est organisé en module autonome.

Selon une vulgarisation abondante, on propose de voir ces modules comme des porteurs de certaines sémantiques (zone de la parole, zone de l'émotion, zone de la réflexion analytique, etc…). Je propose au contraire de voir ces modules comme neutre de toutes sémantiques initiales. C'est leur différence de « mécanisme » qui vonts produire des sortes de « dominante sémantique », mais en aucun cas ces module ne correspondrait à des fonctionnalité prédéfinies.

On peut voir ces modules comme autant de système autonome avec ses propres entrées (cellule « sensitive », ou bien simplement des stimulations provenant « d'autres modules ») et sortie (ce sont les actions musculaire ou bien les fibre nerveuse qui vont servir d'entrée à d'autres modules, et dont la stimulations est conséquentes du traitement par le module).

Le principe de base se doit absolument d'être neutre pour accueillir tout contenu. Mais l'existence de module distinct dans le cerveau donne une nouvelle dimension au mécanisme global. On peut imaginer plusieurs paramètres de fonctionnement dans ce système global supérieurs :

- A quels autres modules, chaque module est-il lié (en entrée et en sortie). Et éventuellement à quelles cellules sensorielles.
- Un mode physiologique de fonctionnement potentiellement différents pour les neurone du module. Par exemple une « émotivité variable » en fonction d'une quantité singulière de flux de besoin ou de satisfaction. Une synthèse propre en fonction d'un fonctionnement des flux différents, une rémanence différente produisant des mémoires distincte etc…Quel processus chimique spécifique produira un mécanisme sémantique particulier ? On peut envisager que les modules sont très différents en fonctionnement vis-à-vis de « la facilité de recherche à distance», l'intensité du mécanisme de « besoin-satisfaction », la profondeur de pénétration du flux de perceptions, etc… Cela produirait des modules sémantiquement « orienté », mais au contenu non déterminé car conservant la neutralité fondamentale pouvant absorber toute sorte de besoin.
- On peut aussi envisager des cellules de traitement beaucoup plus mécanique comme des modules de prétraitement du signal visuel, auditif, …
- La taille de chacun de ces modules peut avoir une action déterminante sur le fonctionnement globale,…

Tout cela produira des circuits privilégié entre certains modules dans le fonctionnement global. Cela produira une sorte de sémantique sous-jacente inhérente à chaque module. Cela produira une psychologie humaine prédisposé à certaines perceptions, certaines réaction, etc… La modularisation produit un fonctionnement sémantique « imposé » ou tout du moins fortement influencé.

Théorie et théories

Il faudrait entrer beaucoup plus dans les détails pour réaliser comment les affirmations présentées ici sont possibles d'un point de vue mécanique. Ce modèle soulève de nombreuses questions philosophiques par l'impact qu'il a sur toutes les questions qui s'intéressent au sens, à la perception, à la réalité, à la pensée, au langage. Ces questions, le détail des explications mécaniques, mais aussi une approche plus précise des concepts essentiels sont apportés dans la version détaillée (qui reste cependant très incomplète).

Mais il est aussi des questions portant sur le modèle lui-même, comme la nature de la conscience ou la liberté. Il faudrait aussi expliquer comment tout cela est compatible avec nos connaissances sur le cerveau, ce qui est loin d'être évident.

Cette théorie consiste à produire une tentative d'explication mécanique de la pensée. Le modèle n'est pas fiable en lui-même, beaucoup de modifications sont possibles. C'est l'approche du phénomène par l'idée de liens, puis la possibilité de mécaniser, la perception, l'acquisition, l'organisation sémantique, l'action etc... qui importe. Le modèle produit-il un angle de vu pertinent ? C'est la question essentielle.

Sous cette hypothèse les conséquences philosophiques, psychologiques, linguistiques, scientifiques, et même métaphysique éventuellement, sont très importantes. A la suite de cette perspective, j'ai approché de nombreuses théories trouvant leur fondement ou leur inspiration dans ce support. Une théorie de la réalité, une épistémologie, une théorie du langage, une théorie des mathématiques (ici ébauchée), une théorie de la physique, un modèle psychiatrique. Cette théorie m'a conduit aussi à un point de vu précis sur les différentes branches philosophiques directement reliées (théorie de la perception, théorie de la signification, théorie de connaissance, noétique, théorie de l'action, …). Ce modèle a été très influent aussi dans une approche de la vérité, du bon sens, de la métaphysique, pour la conception d'une théorie morale, et d'une théologie.

Annexe 2- Théorie de la réalité.

La théorie présentée ici est née indépendamment de la théorie de la pensée, mais elle s'y est très vite liée. Le concept directeur de la théorie de la réalité, la « trame », est traductible par la théorie de la pensée. L'objectif de cette théorie est de donner une vision de la réalité qui est extérieure à nous. Une théorie de la pensée est un fondement nécessaire à une théorie de la réalité puisque nous percevons tout à l'intérieur (par notre esprit). Ici, bien au contraire, nous avons cherché à nous dégager au maximum de la pensée, en présentant même une artificielle indépendance. C'est un regard morphologique général sur « ce qui est clairement » distinct de nous. On prendra donc comme a priori qu'on parle de tout ce qui est hors de nous : ces chose qui existent, existeraient, existeront même si nous n'étions pas là.

Cette théorie formera le fondement d'un regard sur la réalité, la fiabilité et conséquemment sur la science.

L'image de la trame

Voici une description de morphologie globale de la réalité. Cette morphologie unifiée associée à la théorie de la pensée permet de donner une réponse cohérente à de nombreux et délicats problèmes de philosophiques sous-jacents à la question de la réalité, du rapport de la perception au monde, du rapport du monde à la perception, de la nature du monde au-delà de la seule physique.

Pour en parler, il se dessine en moi une image, une analogie, qui me dresse l'autoportrait de ma connaissance. Cette vision donne soudain une cohérence à ma démarche, à mon apprentissage, à ma vision du monde et à ma compréhension de l'histoire. C'est une image qui me parle de la nature de la connaissance et de la réalité des choses :

L'image

« Cette image est celle d'un univers gigantesque démesuré. Cet univers n'est pas rempli d'étoiles et de planètes, mais de cordages. Des fils de toutes tailles sont tendus en tous sens. Ces fils sont assemblés et forment des cordes monstrueusement grosses et solides qui se rejoignent et se démultiplient à l'infini. Et aussi des cordes plus légères, des cordelettes et des ficelles, des fils et des brins presque imperceptibles.

De chaque cordage, de façon très désordonné, sortent des cordelettes comme une branche sort d'un tronc. Et des cordelettes sortent des fils et ainsi de suite. Des immenses cordes, il sort aussi des ficelles ; et même, des brins de fils sortent des entrailles des monstrueux géants.

Chaque corde, chaque fil est tendu entre deux extrémités, d'où il prend naissances. C'est comme si chaque branche sortait d'un arbre et rentrait plus loin dans un autre arbre. Ainsi, chaque lien est bien fixé et possède sa place dans un silence qui semble éternel. En tout sens enchevêtré dans une complexité innommable, mais chacun y possède sa place. Chaque brin, serait-ce le plus fin, y est résolument bien à sa place ; il

concourt à la solidité et à l'équilibre des forces de l'ensemble par sa faible existence.

Soudain, c'est le vertige. En observant les plus petits de ces fils je réalise qu'eux-mêmes sont comme le gros cordage d'un univers plus petit qui est semblable à celui que j'avais vu initialement. Non pas semblable exactement, mais comme une continuité du premier. Comme si cette chute vers l'infiniment petit n'avait pas de limite. Tout de suite alors me vient l'idée de prendre du recul et de regarder le plus loin qu'il m'est donné de distinguer, et là conformément à mon attente, j'y vois aussi un univers de cordages dans lequel est inscrit celui que j'avais vu au départ. Cette dimension fractale de l'univers m'effraie et m'inspire un trouble. Il me semble n'avoir plus de repère de taille.

C'est alors qu'en m'approchant de ces gros cordages, je vois qu'eux aussi ne sont qu'un entrelacement de plus petit fils, qui eux-mêmes sont fait de plus petits. C'est la densité de ces fils qui produit l'apparence d'un objet, l'apparence d'une corde.

Revenant à la globalité, j'aperçois que tous ces cordages ne sont pas disposés de façon hétéroclite, mais qu'il existe des agencements précis qui rassemblent ces fils sous forme des groupements bien visibles. Cela forme des figures ou des motifs qui se répètent fréquemment dans l'ensemble de ce grand tissage. Et malgré leur dimension fractale je discerne des contours à ces groupements. Et chacun de ces groupements est relié à d'autres groupements par la tension des fils qui sont en quantité variable. Mais l'agencement y est surprenant car ces motifs forment eux-mêmes la maille de nouveaux motifs, et ainsi de suite dans les grandes échelles comme dans les petites. La netteté et la clarté de ces groupements ne supposent aucun doute : les motifs sont bien là et se répète inlassablement.

Rien n'est isolé. Tout est relié de façon claire. A non ! Parfois c'est moins évident. L'exemple de ce tout petit fils qui relie des groupements très dense et très éloignés est inattendu. Beaucoup de très gros cordages semblent s'allonger indéfiniment sans qu'on en voit la terminaison, et il en est de même pour des très petits et pour des cordages de toutes tailles.

Mis à part le fait que tout semble bien organisé sous forme de figures, on a l'impression de pouvoir tout y voir : de très grosses cordes immenses et démesurées, et d'autres très grosses cordes qui sont très courtes ; certaines sont même plus grosses que longues. Pourtant aucun fil n'est coupé, tous finissent par aboutir en quelque lieu d'ancrage. Il y a en a de toute taille et de toute longueur, et pourtant le tout semble être très rigoureusement organisé, bien qu'il apparaisse ici où là un fil dont on ignore le groupement ou dont on ignore les attaches.

On constate aussi que beaucoup de groupements procèdent du même type d'agencement. Ils sont très faciles à reconnaître par leur similarité. D'ailleurs, l'ensemble de ces groupements similaires forme un motif qui ressemble à un nouveau groupement plus vaste, une nouvelle figure. On a l'impression que cet immense ensemble est fait de ces répétitions et de ces grandes figures qui s'organisent et se mélangent entre eux en tout sens pour former toutes sortes de nouveaux groupements.

Quand on y regarde attentivement, il se trouve que beaucoup de formes qui semblent organisées ne sont pas si clairement structurées qu'elles ne paraissent. L'image de leur groupement n'est pas nette, bien que les liaisons entre les cordages soient évidentes. A

l'inverse, en y regardant de plus près sous certains angles, certains groupements deviennent alors beaucoup plus évidents. D'autres restent résolument mystérieux, imprécis, d'apparence non organisée, ne formant pas de schémas unifiant.

Je découvre aussi un phénomène curieux : certains groupements qui me paraissaient évidents, forment des groupements très différents suivant le regard qu'on y apporte. Ces différentes apparences se conjuguent à différentes échelles et sous différents angles. Toutes coexistent. Mon regard navigue d'une apparence à l'autre, les réalités apparaissent et disparaissent tour à tour au rythme de ma concentration sur certains motifs et de mes changements de positions. Et je suis surpris de constater que cela se passe sans qu'aucun fil ne bouge.

Il se trouve aussi que certains groupements qui paraissaient nets, ne le sont plus du tout quand on les regarde d'ailleurs. D'autres groupements présentent des formes presque contradictoires avec les premières sous un autre angle de vue. D'autres encore demandent à être regardés de bien des façons avant de pouvoir être distingués. Il m'a semblé qu'après bien des regards, je voyais certains motifs à chaque fois différemment, parfois toujours mieux (la nouvelle figure intégrait et confirmait clairement la précédente), et parfois toujours autrement sans y trouver de rapport.

Quand on regarde aux limites de ce qui est possible de distinguer, on constate toujours ces mêmes motifs, mais parfois on ne fait que l'imaginer car seuls les gros cordages sont visibles. Les formes et les entités y sont beaucoup moins visibles. On ne possède pas assez de précision pour les distinguer nettement. Néanmoins, il semble que certains gros cordages se laissent facilement imaginer par l'effet de tension qu'ils produisent sur l'ensemble de ce qu'on peut nettement voir. »

Une forme du réel

Devant la nature de ces fils, devant l'évidence des figures qui y apparaissent. J'ai nommé cet univers : la trame. Ce mot connaît deux sens et dont chacun apporte une partie de l'idée: un objet fait de fils et l'aperçu global et simplifié d'une histoire, d'un projet.

Le sens de cette vision, c'est notre univers dont la réalité possède une dimension fractale et une possibilité de regards multiples et superposé. Dans ma recherche du bon sens, je me suis aperçu que la réalité dépendait d'angles de perception. Plus je l'observais, plus ma compréhension du monde devenait soit claire, soit confuse, et parfois les deux en même temps. Cette multiplicité de regards, cet affinement possible, ce discernement de groupements et de motifs, présente une conformité avec mon regard sur les choses extérieures.

La trame parle du rapport existant entre les identités du monde, désincarné de toute nature, de toute sémantique particulière hormis l'idée de lien. Ces groupements qui se détachent de l'ensemble dans une apparence d'évidence, ce sont les identités. Ce qu'on nomme d'un seul mot, ce qu'on 'identifie' peut souvent être abordé à de nombreux niveaux, dégageant à chaque fois des réalités différentes. L'identité des choses n'est jamais complètement nette, tout est lié à d'autres identités, elles mêmes liées. L'identité n'est qu'une condensation de la réalité. C'est le contraste dans la densité des liens et dans l'évidence des schémas qui fait l'identité ; quand on peut dire : là, il y a quelque

chose qui se distingue de ce qui l'entoure. Tout évidence de ce type est indissociable des liens qui la forme. Ces liens forment la réalité.

Face au relativisme issu de cette indistinction fondamentale, je me rebelle et j'affirme que les identités existent bel et bien. Mais je finis par me résoudre à comprendre leur imperfection. Je ne sais ce que sont ces fils, ni ce qu'est la réalité, ni comment les identités sont reliées entre elles par un sens commun aussi stable. Il y a là le mystère du fonctionnement humain et de sa psychologie profonde unifiant une réalité si dispersée.

Parlons des objets matériels. N'est-ce pas là une manifestation des plus pures identités ? Ce n'est pas si évident. En effet, aucun contour matériel n'est net, lisse quand on affine le regard. Tout est formé « d'atomes ». Chaque atome est une identité mouvante lui-même formé d'entités mouvantes qui finissent par en perdre même leur identité (dans la mécanique quantique). Comment pourrait-on dire qu'un contour est net ? Ce n'est jamais qu'une apparence, une condensation. Comment définir l'identité d'une forme si la notion de contour net n'est qu'une apparence idéale. Il y a sans cesse des « échanges de matière » avec l'extérieur. Comment peut-on dire qu'une identité est définie par son « contenu » s'il n'y a pas strictement de conteneur ? S'il en est ainsi de la matière, la réalité par excellence, c'est encore plus vrai dans toutes sortes d'autres réalités.

Les choses 'évidentes' ne sont pas seulement de nature matérielle. Le concept d'identité ne possède pas de contour net. Et avec lui les concepts de 'vrai', de 'réel' appliqués aux identités les plus claires trouvent des failles dans l'analyse de leur évidence.

Certains domaines sont plus nets, d'autres le sont moins. Certaines réalités sont vues très différemment par les uns ou les autres tout en correspondant aux mêmes événements. On parlera d'angle de perception.

La vie n'a pas besoin de l'analyse pour être perçue, qu'elle soit perçue au travers de concepts naturels (instinctifs directe) ou construits (cumulatif, temporellement distant). La trame se pose d'abord comme une évidence. Mais cette évidence est multiforme. Elle change avec la perception et la compréhension que donnent l'expérience et la connaissance de chacun. C'est comme si la connaissance de chacun s'ouvrait à partir des motifs qu'il a déjà perçus permettant d'en percevoir de nouveau fait à partir de ceux acquis.

Autant l'évidence se suffit d'elle-même, autant la recherche de nouvelles perceptions ne semble avoir aucune limite qui se pose comme une fin en soi. De tout côté, la connaissance semble pouvoir être approfondie. Le recul que l'on prend pour y voir plus clair semble sans cesse pouvoir être amplifié, pouvoir être changé d'angle et produire une perception différente. De toute part, des liens se tissent. Nous sommes d'ailleurs souvent dans l'impossibilité de réaliser un recul suffisant, les formes lointaines restent floues.

Il peut sembler bien réducteur d'avoir présenté une trame statique alors que la vie est entièrement dynamique. Mais chaque analogie à ses limites. La complexité de la vie représentée par une image mentale en trois dimensions est une immense simplification en soi. En fait la notion de lien ne limite pas à trois dimensions (c'est notre perception mentale qui nous limite). L'absence du temps n'est pas un problème majeur, il n'est

qu'une dimension de la trame au même titre que n'importe quelle autre dimension. Le temps n'est qu'une perspective sur des liens.

Cette vision de la trame suppose-t-elle une interprétation déterminisme de la réalité ? Ca pourrait apparaître comme une faiblesse. Ce n'est pas le lieu de disserter sur la question du déterminisme, mais si la liberté n'est pas suggéré par la trame, c'est parce qu'il s'agit de voir les liens objectifs. Restons sur cette image grossière de la connaissance, sans achopper sur les limites de cette analogie. L'image de la trame a pour vocation d'apporter une caricature de la réalité. Et comme toute caricature, elle insiste uniquement sur certains traits qui rendent l'image reconnaissable au détriment d'autres plus subtils. La trame aborde la réalité extérieure à nous en ce qu'elle a d'objectif, elle n'englobe pas la vie humaine.

Commentaires

Réalité retrouvée

La trame parlant des réalités extérieures, ne cherche pas à expliquer les mécanismes de la perception de ces réalités, ni le mécanisme de l'apprentissage. Il y a des différence entre ce que nous percevons des choses, de ce que sont les choses, de ce qu'elles peuvent nous révéler d'elles. Notre perception n'est toujours que partielle.

La réalité que nous percevons, est comme la ligne droite du centre de notre regard, qui possède à peine plus qu'une simple dimension. En balayant de ce regard la réalité, nous pouvons percevoir plus en détail les deux dimensions d'un corps étendu, un corps lui-même en trois dimensions qui se meut dans le temps, une quatrième dimension. Mais il ne s'agit là que d'étendue. La réalité que nous percevons n'est qu'une vision bien limitée d'objets plongés dans une multitude de facteurs influents qui ne seront jamais maîtrisés d'un unique regard. Nous voyons un ensemble en une fois, mais ne pouvons considérer ces ensembles que tour à tour.

Dans la trame, je me retrouve avec satisfaction dans le confort de mon bon sens quotidien. Lorsque je regarde une pierre, l'interrogation philosophique et la prise de conscience que ce regard est une simple apparence pourrait m'interroger sur la réalité de cette apparence. Mais la trame m'affirme que ce que je vois est bien une vraie pierre. Cette apparence est la réalité. Ce n'est pas seulement une illusion, la réalité se forme en condensation ; une vraie pierre est là devant moi. C'est une idée essentielle de la trame que poser l'aperçu global, le regard de l'évidence comme une approche entièrement fondée de la réalité, et c'est même le « fond » de la réalité dans la trame : les condensations. Il ne s'agit pas de confondre évidence et réalité, car les mécanismes de la perception interfèrent et peuvent éloigner du réel en produisant des évidences non réelles. Il s'agit de dire que la réalité est de la forme d'un apparaitre immédiat, qu'elle se manifeste comme une perception d'évidence. Sans avoir la réciproque qui est une question profonde et dont on pourra donner un avis qu'après avoir fait un tour élargi des mécanismes de la pensée humaine; et ce n'est pas notre propos ici.

Maintenant, il faut entrevoir que la réalité d'un « objet » ne se limite pas à ce que je vois. L'« existence » d'une identité est complexe car immensément liée à d'autres réalités, d'autres schémas: pour cette pierre, il y a par exemples les atomes que je ne vois pas,

l'intérieur de la pierre n'est pas accessible à mon regard alors que je l'imagine « contenue » dans mon identité, l'échange permanent avec l'extérieur fait que la pierre n'est jamais là même, quand je considère son origine, sa position, son contexte, son histoire, etc… Je m'aperçois que la réalité de « cette » pierre est immensément complexe. « Son » identité n'est pas bien définie, elle est fondamentalement liée à cette apparence. Et l'on comprend que la vision que m'offre cette pierre est une condensation de la trame. L'existence d'une structure plus fine au-delà de cette condensation est une autre condensation dans la trame. Le tout se conjugue à tous les temps possibles. Mais cela ne signifie pas que l'on ait besoin de réciter les conjugaisons, une réalité extérieure est bien là dans le regard que j'ai sur cette pierre. Cette réalité de l'apparaitre est ce qui permet la perception de toutes ces condensations.

Le principe de la trame permet aussi de ne pas faire confiance aux mots. Ils sont incapables d'exprimer le réel par des définitions exiguës, ils se contentent de nommer des condensations souvent imprécises. Le sens des mots représentant la réalité est très souvent flou, flexible, vague, élastique, imprécis. Les mots sont liés par des sens de façon inattendue, complexe, contextuée (on s'en fera une idée dans le chapitre théorie du langage). Les sens se recoupent et s'éloignent. Leur usage ne peut se soumettre à une analyse logique précise de réalité dans la trame, car elle-même n'est pas définitive, elle n'est qu'aperçu.

Condensation

Ce qui est intéressant dans cette approche, c'est que le regard de la trame sur le monde n'a rien changé à mes connaissances du monde. Il m'a juste donné des limites, une direction, des réserves : la perception des identités n'est qu'un phénomène de groupement de la réalité, un phénomène de condensation de la trame. Dans le mot « condensation », il y a deux idées importantes :

- la densité : l'idée que les fils (la réalité) rapprochés produisent de toute évidence une forme discernable sans qu'il y ait pour autant de contour bien défini.
- la matérialisation d'un gaz : comme si un objet vaporeux, flou, invisible produisait soudain quelque chose de visible, d'accessible, de matériel.

Le mot « condensation » doit faire penser à une apparence suffisamment centré sur elle-même en comparaison à ce qui l'entoure pour être perçue clairement. Ainsi, la notion d'identité, dont la difficulté philosophique majeure est la définition, trouve sa place dans la trame. La définition de l'identité est postérieure à sa perception. Les identités existent, elles sont plus ou moins claires, elles ne se constituent pas sur l'analyse, mais sur la perception. Toute réalité n'est qu'identité, sauf peut-être la réalité elle-même qui est le mystère de la nature de l'existence de tout cela ; mais est-ce bien encore une réalité ? N'est-ce pas plutôt une recherche de sens. Toute réalité n'est qu'apparence du réel, mais aussi une réelle apparence. La réalité de l'apparence ne se justifie pas, elle se vit par la perception. Et la perception peut être éduquée à voir plus, à voir les schémas qui positionnent d'autres schémas dans le monde.

Sous cette perspective, la réalité n'a peut-être plus un sens théorique aussi fort qu'on lui donnait initialement par le bon sens naïf. Mais c'est un sens suffisamment fort pour qu'il soutienne la réalité de la vie. Les apparences ne sont pas seulement sauvées, elles ont

trouvé un appui on ne peut plus ferme : le ressenti qui incarne la réalité. Et c'est, de toute évidence, bien ainsi que cela se passe : quand je vois une pierre, « je vois » « une pierre » et les deux ne font qu'un.

Loin du compte

Tout ce qui nous apparaît avec évidence comme une identité bien établie est elle-même reliée à toutes sortes d'autres identités. Le contour d'une « identité évidente » n'est pas du tout facile à percevoir.

Pour connaître l'interaction entre deux réalités, il ne suffit pas d'établir l'existence d'une relation entre ces deux réalités, mais il faut chercher à connaître la nature et l'équilibre de l'ensemble des toutes les relations majeures qui existent entre ces deux identités. Tant de raisonnements sont abusifs en ignorant ce point, pour se concentrer sur une logique auto-suffisante. Le propre du fou est de produire des choses délirantes, le propre du génie est d'inventer des choses surprenantes, le propre du sage est de savoir peser la différence. On ne peut se satisfaire de l'existence d'un lien de sens pour justifier une interaction logique profonde. La réalité est une recherche de globalité et d'objectivité. La connaissance utile consiste à percevoir non pas un lien, mais la structure unissante, la tension résultante de tous les liens perçus. Ceci s'obtient par l'analyse des liens principaux, les plus forts et aussi des liens secondaires, et même parfois des plus faibles quand on est face à un phénomène complexe.

L'idée de la trame apporte un sentiment un peu déroutant : l'impossibilité d'une logique suffisante face à la réalité, l'impossibilité de s'occuper du détail pour définir la globalité. La recherche de réalisme ne peut-être entamée que par la globalité du regard sur l'ensemble (y compris le détail). L'analyse nous éloigne bien souvent de l'identité et donc de la réalité, en se focalisant sur des interactions particulière plutôt que sur la figure globale. L'analyse du détail n'a pas un rôle de perception d'identité, elle sert à connaître l'intégration de l'identité dans les schémas qui lui sont liées, elle a un rôle de perception, de compréhension, d'intégration.

Réalité immatérielle ?

N'existe-t-il de réalité que pour la matière ? Par exemple, les lois de la physique sont-elles une pure réalité ou bien seulement une vue de l'esprit ? Sous l'idée centrale des condensations, il semble assez manifeste que les lois, les principes, les mécanismes sont tout autant des réalités que la matière elle-même. Cela est confirmé par nos physiciens, pour qui la matière se rapproche plus de l'idée de loi que de l'idée de matérialité suggéré par nos sens naïfs.

Pourquoi faudrait-il croire que la matière est plus réelle que les autres principes manifestes qui sont dans la nature ? La matière possède plus de « réalité matérielle » bien évidemment, mais possède-t-elle plus de réalité, plus d'existence, plus de vérité, plus de présence, plus d'évidence ? La réalité de la matière, c'est la certitude de leur existence naïve telle que nous les percevons. La réalité des sciences physiques n'est-elle pas aussi une certaine forme de certitude. Selon le principe de la trame, il me semble que toutes les réalités qui émanent de condensations manifestes de la trame sont dignes d'être appelées réalités au même titre qu'une autre. Ce qui fait la réalité d'une identité ce n'est pas sa position dans la trame (la matérialité en particulier), mais la

netteté avec laquelle apparaît cette condensation malgré les changements de perspective.

Par contre, il est vrai qu'il existe une différence de nature entre des « objets » et des « principes » en ce que l'un est « matériel » et pas l'autre. Mais existe-t-il une différence de réalité ? L'analyse nous conduit à voir que la matière n'est pas une réalité aussi précise qu'on l'imagine naïvement. La « réalité » de la matière semble plus vraie que les autres. On en trouve la raison dans le mécanisme de perception : la réalité matérielle est tout simplement directement au dessus de nos sens perceptif qui sont la porte d'entrée du monde en nous. La matière est donc notre perception première du monde, c'est ce qui lui confère son sentiment de « réalité ultime ». Mais la réalité, faite de liens tissés en tout sens, dépasse très nettement la seule perception première. Les réalités se constitue en nous en abstraction de plus en plus éloignée de la perception directe (l'idée de mouton est une abstraction déjà bien au dessus d'une perception directe d'un mouton, puis l'idée de lumière, l'idée de famille, l'idée de beauté, l'idée de vide, l'idée de mal, etc...). De plus l'analyse physique de la matière rapproche l'idée de « matière » de réalités très abstraites. Cela nous conduit à opérer un rapprochement de toutes les réalités, de toutes les évidences, de tous les apparaitre abondamment partageables. Tout procède du mécanisme de condensation, c'est la netteté de la perception liée à nos sens stable par changement de vue qui fait la réalité, rien n'est palpable au final et dans l'absolu.

C'est dans cette analyse de la matérialité qu'apparaît toute la pertinence du schéma de la trame en posant la netteté comme réalité bien avant la matière (qui est bien le lieu d'une réalité d'une netteté incroyable... tant qu'on reste dans le domaine naïf). Cette confusion a été à l'origine d'un nombre immense de discussions philosophiques sur l'unité, la multiplicité, la singularité, les universaux, le monde des idées, etc... Et l'on comprend alors pourquoi la déconstruction de la réalité matérielle par la physique est à l'origine d'un trouble philosophique.

Identités

Venons-en à un problème central du concept de réalité, celui de l'identité. Qu'est-ce qui est digne du nom d'identité ? Qu'est-ce qui est bien défini au point de former une chose identifiable de façon univoque ?

On a constaté que la réalité des identités est d'abord un phénomène d'apparence et donc de perception au sens large. L'identité est une réalité subjective, au moins du point de vue théorique (quand on s'intéresse à « l'identité de l'identité »). L'identité est formée par la condensation de la réalité en forme distinguable par le bon sens. Seulement, la définition de l'identité pose problème, car si l'évidence de certaines identités est manifeste, il existe des identités dont l'évidence est pour le moins ambiguë. Sous ce constat, le rapport de la réalité à l'identité devient beaucoup plus subjectif (au sens de : peu clair) que dans une perception naïve. Cela n'implique pas pour autant que l'existence de toute réalité soit subjective. Il existe des réalités manifestes, et d'autres qui le sont moins. Il en est ainsi de certaines réalités comme des formes dans les nuages, si certaines formes apparaissent manifestement, d'autres sont beaucoup moins évidentes. Le regard différera de l'une à l'autre, mais cela n'empêche pas au nuage d'être présent tel qu'il est en réalité. Seule la lecture de la forme diffère, la réalité est

bien extérieure, mais les identités perçues ne sont pas forcément univoques. La trame nous offre des identités, des condensations, qui peuvent prêter à confusion tout en étant bien réelles. Cela est inhérent à notre définition des identités par la trame, elles ne sont pas univoques dans leur fondement. Une identité est d'autant mieux définie que la condensation est compacte, unie et hétérogène avec le milieu qui l'entoure. La différence des perceptions est due à une différence de lecture, qui est une histoire personnelle de connaissances, de représentation, de contextualité. On a exprimé cette différence d'approche par le vocable d'angle de vue.

Un autre point important qui apparaît dans la trame est qu'il n'y a pas fondamentalement de contenant et de contenu, de singulier et de catégorie. C'est une autre difficulté philosophique auquel l'image de la trame propose une réponse. Tout est d'une seule et même nature : des condensations, des motifs que l'on reconnaît. Les motifs contiennent toujours d'autres motifs et s'inscrivent systématiquement à l'intérieur d'autres motifs plus grands ; ils sont reliés aux autres identités par d'autres motifs encore. Il est même fréquent que des motifs se superposent. Tout n'étant que motif, on ne peut parler de contenant et de contenu. Le concept de catégorie est une approche relative si dans le fond tout est d'une nature commune. (Nonobstant, le concept de catégorie est lui-même une réelle condensation du réel).

Netteté

Cela nous conduit à une éthique de la réalité, à une épistémologie : le vrai dans la trame sont les condensations qui ne posent pas d'ambiguïté.

Si une notion peut être niée sans que cela ne pose de gêne, sans que cela ne vienne heurter d'autres concepts, il y a des doutes légitimes à poser sur l'existence d'une telle identité. On est en droit de se poser des questions sur la validité de la perception qui y conduit.

La réalité objective repose sur l'évidence et la cohérence. Cela ne signifie pas qu'une perception confuse soit fausse. Bien au contraire, il est de la nature de certaine perception d'être confuse, difficilement identifiable en identité organisé.

Il se peut aussi qu'une personne distingue nettement ce qu'une autre ne distingue pas bien à cause de la différence de ses acquis, de son angle de vue. Les concepts déjà identifié sont le moyen de reconnaissance de concepts fabriqués à partir d'eux. Une réalité existe là en-dehors de nous, il nous reste à la voire, à la décrire. Cela n'est ni simple, ni univoque. L'histoire des connaissances scientifiques en témoigne. La recherche de la connaissance consiste à établir la réalité manifeste et partageable par tous. La recherche de la netteté, de la clarté partageable est le fondement d'une éthique de la connaissance de la réalité.

Inertie

Une des réalités importantes et évidente de la trame est qu'elle possède une grande inertie, une grande pérennité de ses structures, de ses motifs. Dit autrement, le bon sens nous a appris à « connaître » la trame. La connaissance des motifs permet de deviner les formes non visibles avec une certaine efficacité. Parce que la trame « se répète ». La trame est faite d'incessantes reproductions des mêmes motifs en certains lieux habituels. Une des natures les plus manifestes de la trame est de respecter les lois

qu'elle nous présente avec netteté. C'est par cette pérennité que nos connaissances sont réalités. Ce sont ces habitudes et cette confiance issue du bon sens qui nous permettent de vivre tous les jours sans avoir à tout analyser (d'ailleurs sur quelle base le ferait-on) ou à tout observer en permanence. Nous emmagasinons une connaissance et celle-ci reste vraie parce que la trame est pérenne. C'est un constat du bon sens, mais un constat fondamental. La permanence des lois, la répétition constante des figures qui se dessinent dans la totalité des objets nous permettent de « sa-voir » sans « voir ». Cette connaissance de pérennité de la trame est issue de l'observation de la trame.

L'observation directe de la trame nous offre à chaque instant seulement une façade de la réalité (analogie avec la vision : nous percevons seulement une image en deux dimensions). Quand on regarde la trame, on perçoit pourtant beaucoup plus de réalité qu'on n'en voit. Il semble même que ce soit la majorité. C'est parce que j'ai en moi une connaissance accumulée des objets dont je ne vois qu'une face. Quand je perçois, je ne vois pas seulement cette face, mais tout l'objet accumulé et cela est vrai parce que la trame possède une inertie. Cette inertie nous aide à palier à beaucoup de lacunes de notre perception, de sorte qu'il nous suffit de voir assez peu pour en distinguer beaucoup. Un peu d'observation nous permet de voir beaucoup, même si la réalité que l'on voit n'est alors que « l'habitude de la réalité ». On constate la part importante du mécanisme de perception dans la réalité. C'est un mécanisme qui emmagasine le sens. La perception de la réalité est davantage accumulation que perception directe et instantanée. C'est la condition de notre accès à un monde qui dépasse nos sens, c'est la condition de notre accès au monde.

Limite de la pérennité

Mais la pérennité de la trame possède ses limites, et c'est là, un autre principe fondamental qui a aussi été montré par l'histoire et le bon sens. C'est un principe très important : il ne faut pas trop présumer de ce qu'on ne voit pas dans la trame. Il faut être vigilant sur ce qu'on ne voit pas, car l'inertie de la trame possède ses limites. En particulier, la trame n'est pas uniforme. Si l'on définit un lieu de la trame par la présence de certains motifs particuliers. On pourrait définir cette limite de pérennité par la tautologie : autres lieux, autres motifs. Cela signifie qu'une extension de certains motifs hors de leurs lieux de leur connaissance effective est un pari délicat.

C'est valable dans la perception immédiate. On peut penser aux illusions d'optiques que notre perception d'évidence n'est pas fiable. Et dans un registre plus lourd, à nos sentiments de certitudes que l'on découvre un jour erroné. C'est valable dans la perception analytique : on commet facilement l'erreur de surestimer la pérennité par une généralisation abusive. En ligne de mire, on peut avoir l'usage de la logique qui authentifie faussement des erreurs.

On ne peut affirmer ce qui se passe à d'autres échelles de réalité, en d'autres lieux. Les principes qui semblent les plus évidents, les plus généraux peuvent être remis en cause dans un lieu inexploré de la trame. Nous en avons parlé au sujet de la réalité matérielle. Même une réalité quasiment permanente ne peut pas être généralisée de façon absolue à toute la trame. En effet, la trame offre beaucoup de surprises. Il serait bien téméraire ou prétentieux de supposer l'absolu d'un phénomène de la trame (Quid du concept de la trame…).

En remettant en cause l'absolutisme d'un motif, pour se concentrer sur sa connaissance effective, nous venons de décrire un enseignement important du bon sens et de la connaissance de la trame.

La réalité surpasse l'identité

Cela nous conduit à une autre remarque pertinente : la réalité ne sera pas toujours explicable en terme d'identités. Autrement dit, il existe des zones de la trame qui sont plus difficiles à condenser en identités que d'autres. Face à ce genre de décors, il y a alors deux attitudes possibles :

- l'histoire ayant montré que beaucoup de régions obscures ont pu être décortiquées par l'analyse, certains en tirent la conclusion que tout peut probablement être analysé de la sorte (on pensera à Descartes et le discours de la méthode).
- On peut dans une autre perspective penser qu'il existe bien des lieux de la trame qui sont beaucoup trop complexes et enchevêtrés pour qu'il soit possible de les décortiquer en structure de motifs clairement perceptibles. Il peut tout simplement être impossible de dissocier certains enchevêtrements en identités définies par des interactions simples parce que les schémas en jeux ne procèdent pas d'une telle dissociation. C'est le fait que notre pensée repose sur l'identification et que toute notre pratique se concentre sur ces réalités condensées qui nous font croire que tout est « identifiable ».

La première attitude semble osée, parce que le bon sens nous a appris que « en général, il n'est pas bon de trop généraliser ». Et la seconde attitude ? La difficulté de percevoir une explication n'est pas la négation de l'existence de cette réalité. L'histoire nous l'a bien montré, beaucoup de concepts ont fini par sortir de leur subjectivité.

Par contre, la science moderne donne comme acceptable de penser que des régions de la trame sont d'une telle complexité et d'un enchevêtrement si élaboré qu'il ne nous est plus possible de les étudier en fragments indépendants, mais seulement en globalité avec toutes les limites à l'objectivité que cela impose. En thermodynamique par exemple, l'étude des réalités locales n'est pas suffisante pour rendre compte du comportement complexe global (on pensera aux structures dissipatives). En mathématiques les manifestations déterministes du chaos montre l'inaccessible complexité issue d'une réalité simple.

A partir du moment où on observe une réalité, des liens peuvent toujours être mis en évidence...puisqu'on voit des choses. Mais cela ne suffit pas à rendre analysable un comportement global ou à être décrit en structure d'identité organisée. Dans ce genre de situation complexe ou confuse, il est préférable de ne pas être trop osé sur les affirmations de réalité, de ne pas fonder trop d'espoir sur une analyse trop partielle, d'attendre qu'une explication ait rendu des conclusions claires et pleines de bon sens pour acquérir le rang de connaissance fiable.

Faut-il alors ne pas se préoccuper de ces parties confuses de la trame où l'on ne peut construire de connaissances solides (on peut penser à une grande partie des sciences humaines) ? Ce serait une erreur pour la connaissance, ces parties de la trame sont tout aussi réelles. C'est leur organisation qui est confuse. La conquête de ces réalités est plus difficile, voire inaccessible dans leur clarté globale, mais cela n'empêche pas des

connaissances locales fiables.

Il est impossible de connaître à l'avance ce qui est impossible à connaître. L'espoir de parvenir à la compréhension donnera de la volonté pour percer les mystères, mais pas forcément la faculté. Entre les deux il y a beaucoup de raccourcis, de voie sans issue, de fausse clarté. C'est difficile de regarder ce qu'on ne voit pas.

L'extérieur et l'intérieur

La trame c'est l'idée de l'existence d'une réalité extérieure à nous. Sa description, nous parle de ce qui n'est pas nous. Mais ce n'est qu'un regard simplifié et idéal, un regard sur les possibilités et les difficultés de perception de ce qui est extérieur.

La compréhension du fonctionnement de la perception nous montre qu'il est impossible de parler de la réalité sans prendre en compte son mécanisme d'acquisition intérieure. La perception ne repose pas seulement sur la réalité extérieure, mais sur de nombreuses réalités intérieures :

- Nous ne percevons que ce que nous avons acquis en nous. Ainsi la perception est dépendante de nos acquisitions historiques. Nous ne percevons pas le monde, mais le monde au travers de nos expériences accumulées et synthétisée. Cela reste des liens, mais ce sont des liens partiels, des constructions singulières. Par le principe de convergence (entre les zones sémantiques) ces constructions accèdent à une similarité, une communauté de perception.
- Il faut ajouter à cela l'autonomie, la possibilité de construire des liens internes en toute liberté. Cela génère des concepts autonomes, des liens qui ne sont pas issue de la perception du monde par ressemblance et synthèse. Mais par pure construction libre. Ce mécanisme s'intègre sans rupture avec notre perception du monde. Ainsi nous pouvons tordre, influencer la perception du monde. Il s'agit en particulier de toutes nos théories artificielles sur le monde qui finissent par nous donner un regard dévoyé du monde. La liberté de nos constructions conceptuelles internes nous fabrique le monde, nous fabrique notre propre monde.
- Ces libertés sont celles d'un individu, mais aussi de chaque groupe d'individu, de chaque société. L'éducation transmet un regard sur le monde. Transmet des concepts à la fois artificiels et à la fois objectifs dans lesquels il est impossible de trouver une frontière. Cette impossibilité provient du fait que les liens construit sont toujours singulier, ce qui produit des « abstractions singulières » et donc l'impossibilité d'une abstraction idéale ; et puis par le fait que les liens sont profondément entremêlés, qu'ils sont inconscients et que rien ne différence un ressenti artificiel d'un ressenti réel. Le mode d'accès au réel par le langage forme une immense réalité librement constituable dont la réalité ne peut être attestée simplement, l'influence des mots sur notre perception du monde est fondamentale.
- Notre position dans le monde, la constitution de notre perception, la nature de nos cellules sensorielles, l'organisation modulaire de notre cerveau, les mécanismes physiologiques singulier du mécanisme de perception, les réalités psychologiques conséquentes à ces organisations sont autant d'influence, de filtre, mais aussi de moyen d'accès à un monde singulier, un monde formaté, filtré par ces moyens d'accès.

Ces mécanismes produisent que notre perception (la seule chose qui nous rend le monde accessible) est irrémédiablement influencé. Notre perception n'est pas un accès neutre au monde. On ne peut qualifier quoi que ce soit de purement « extérieure » à nous. Ainsi l'idée de la trame n'est qu'une image idéale, construite au dessus des convergences conceptuelles qui nous montre l'extériorité du monde. Cette image de la trame nous parle d'abstractions, de morphologies, de réalités, de concepts de reconnaissance autour d'une perception d'évidence d'un monde extérieure. Cependant il restera irréductiblement l'impossible d'établir une césure entre nous et le monde. Le monde ne sera jamais que notre monde. Par contre une confiance réelle, vitale et naturelle s'impose devant les abstractions qui nous révèlent ce monde et cette extériorité. La fiabilité est réelle ; l'extériorité est même première, elle est avant l'auto-compréhension de nos filtres interne qui nous l'éloigne, et qui ne sont aussi que compréhension d'extériorité d'ailleurs.

C'est donc plutôt au niveau de la césure entre ce qui est extérieur et ce qui ne l'est pas que se pose le problème. C'est au niveau de notre propre influence permanente, inopportune, imprévisible, déformante, non-dissociable sur la perception du monde. Entre ces deux pôles, nous et le monde, il n'existe pas de rupture, chacun prend possession de l'autre. Le gain de cette perspective, c'est aussi la compréhension de nos incontournables limites : l'idée d'une invisible teinte, d'une morphologie sans forme, qui enserre la réalité) la seule dimension de notre sensibilité et de nos perceptions. C'est la compréhension que notre accès au monde est forcément particulier, singulier, filtrant bien qu'il soit impossible d'en percevoir la forme ou la nature, puisque c'est la seule source de notre perception.

Il était nécessaire d'aborder le lien entre la trame et la pensée, afin de comprendre l'idéalité, l'abstraction du concept même de trame qui se laisserait trop facilement voir comme un conteneur, alors qu'il n'est lui-même qu'un contenu. Un contenu qui je l'espère est un conteneur pertinent pour nous parlé du contenu du monde.

Conclusion

Nous avons maintenant accompli un pas supplémentaire dans la perception de la réalité. Vu la subjectivité de cette description, un logicien pourrait exiger davantage de pertinence à notre définition de la réalité. Mais comme le critère de jugement est le bon sens, l'élément de pertinence est bien davantage la cohérence globale que l'explication technique.

Ainsi, je renverse une démarche courante de la fondation de la réalité : la démarche de la connaissance du réel ne consiste pas en une analyse des vérités les plus absolues, les plus fines pour parvenir à organisé la connaissance du global et du particulier par leur position au dessus d'un fondement. La démarche de la connaissance procède en une analyse de l'évidence, de la perception immédiate qui a pour objectif de découvrir les contours, l'organisation interne. La recherche d'un approfondissement n'est pas la recherche de la réalité et des fondements, mais la découverte de nouvelles réalités. Le fondement de la réalité est dans la clarté, elle s'affine par l'analyse et non dans un schéma qui se superposerait à tout et par là même ne rendrait compte de rien. Quand on y pense, c'est d'ailleurs la démarche historique de la science : la naïveté globale

cède place à une science toujours plus affinée qui n'a jamais complètement remis en cause toutes les perceptions du passé, même s'il existe des ruptures importantes.

Dans cette perspective, il me semble nécessaire de remettre l'accent sur l'un des principes importants de la trame qui est difficile de percevoir, car il s'exprime négativement : c'est le fait de ne pas présumer de ce qui est hors de notre perception, le fait de ne pas généraliser en-dehors du cadre dessiné par le bon sens : chaque schéma possède un domaine de la validité dont il ne faut pas dépasser la clarté. Le principe d'inertie semble tellement ancré dans notre bon sens qu'on en oublie facilement les limites. Les exemples conservés par l'histoire ont montré à quel point notre confiance en l'inertie est trop grande. Cette confiance naturelle à pour cause l'inertie qui est un fait authentique, mais elle doit être tempérée par l'expérience et la connaissance de ses limites qui sont tout aussi authentique, mais moins fréquente (pérennité oblige). Il est curieux de constater qu'à l'inverse, on s'éprend facilement pour la généralisation (quid de ma démarche...). Pour citer un grand classique, on peut rappeler l'exemple de la révolution copernicienne qui a délogé la terre du centre de l'univers en le faisant tourner autour du soleil. Cette conception était si manifestement contraire au principe généralisé d'anthropocentrisme qu'il était difficile d'intégrer un nouvelle perspective aux constats d'évidence. On peut aussi énoncer toutes ces transformations radicales issues de la physique, redéfinissant tant de concepts classiques : la notion d'instant et de simultanéité, les notions de matière, de temps et d'espace.

Toutes ces ruptures me semblent proprement remarquables dans le bouleversement des évidences et de la pérennité de la trame. Sans remettre tout en cause, elle bouscule des généralisations qui demandaient à être nuancées. On trouve de tels exemples en tout lieu. La notion de bouleversement, de rupture possède ainsi quelque chose d'essentiel, à moins que ça ne soit plutôt la notion d'élargissement de la perception. Maintenant, ce serait aussi un tort d'en faire une nouvelle norme, et de généraliser « l'absence de généralisation » en systématisant une recherche spécifiquement portée sur l'attente du bouleversement. La conscience du bouleversement ne doit pas nous conduire à un systématisme de la révolution. Car la pérennité est un fait non remis en cause par chacun de ses bouleversements : la stabilité du monde traverse nos perceptions de nouveaux schémas. Le bon sens nous invite plutôt à l'équilibre : ne pas rejeter les apparences qui restent pertinentes au dessus des « bouleversements », la recherche d'une vision globale. Le bouleversement n'est pas une norme, il posséde sa propre attente, comme une possibilité sur les chemins de l'inexploré. Mon bon sens ne doit devenir borné et rigide dans aucune direction, au contraire tout ce qui est général nous guide et de l'autre côté toute généralisation hors propos nous trompe. La pérennité s'impose majestueusement dans la trame, et les terrains inexplorés nous réservent probablement des surprises. L'esprit ouvert aux transformations doit se confier dans le bon sens de la pérennité : ce que j'ai déjà vu correspond à une réalité qui peut être sera réorganisé, mais qui n'en demeure pas moins réelle. Voilà une leçon de bon sens, un équilibre entre pérennité et rupture, en donnant à chacun la place que notre connaissance leur a acquise.

Il existe encore bien d'autres cohérences qui peuvent être établies entre l'image de la trame et l'histoire de la connaissance fiable, mais à partir des quelques traits grossiers que nous avons apporté ici, on se fera une idée de la pertinence de ce concept.